This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

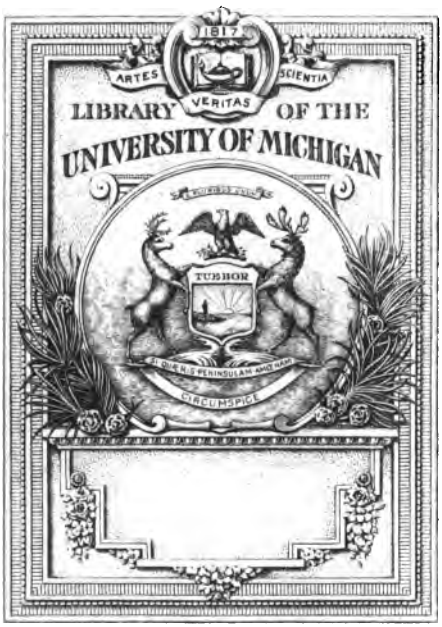
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
807
.C29
1786

2573
Alexander Gray 5-8
QA
807
.C29
1786

ESSAI

SUR

LES MACHINES

EN GÉNÉRAL.

Lazare Nicolas Marguerite, comte
Par M. CARNOT, Capitaine au Corps royal du Génie, de l'Académie des Sciences, Arts & Belles-Lettres de Dijon, Correſpondant du Muſée de Paris.

NOUVELLE ÉDITION.

A DIJON,
DE L'IMPRIMERIE DE DEFAY.
Et ſe vend, A PARIS,
Chez NYON l'aîné, Libraire, rue du Jardinet.

M. DCC. LXXXVI.
Avec Approbation & Permiſſion.

QA
807
C29
1786

PRÉFACE.

QUOIQUE la théorie dont il s'agit ici, ſoit applicable à toutes les queſtions qui concernent la communication des mouvements, on a donné à cet opuſcule le titre *d'Eſſai ſur les Machines en général*; premiérement, parce que ce ſont principalement les Machines qu'on y a en vue, comme étant l'objet le plus important de la méchanique; & en ſecond lieu, parce qu'il n'y eſt queſtion d'aucune Machine particuliere, mais ſeulement des propriétés qui ſont communes à toutes.

Cette théorie eſt fondée ſur trois définitions principales; la premiere regarde certains mouvements que j'appelle *géometriques*, parce qu'ils peuvent ſe déterminer par les ſeuls principes de la géometrie, & ſont abſolument indépendants des regles de la Dynamique; je n'ai pas cru qu'on pût aiſément s'en paſſer, ſans laiſſer du louche dans l'énoncé des principales propoſitions,

413336

comme je le fais voir en particulier pour le principe de *Deſcartes.*

Par la ſeconde de mes définitions, je tâche de fixer la ſignification des termes *force ſollicitante* & *force réſiſtante* : on ne peut, ce me ſemble, comparer clairement les cauſes avec les effets dans les Machines, ſans une diſtinction bien caractériſée entre ces différentes forces ; & c'eſt cette diſtinction ſur laquelle il me paroît qu'on a toujours laiſſé quelque choſe de vague & d'indéterminé.

Enfin, ma troiſieme définition, eſt celle par laquelle je donne le nom de *moment d'activité* d'une puiſſance, à une quantité dans laquelle il s'agit d'une puiſſance qui eſt réellement en activité ou en mouvement, & où l'on tient compte auſſi de chacun des inſtants employés par cette force, c'eſt-à-dire, du temps pendant lequel elle agit. Quoi qu'il en ſoit, on ne peut diſconvenir que cette quantité, ſous quelque dénomination qu'on veuille la déſigner, ne ſe rencontre continuellement dans l'analyſe des Machines en mouvement.

A l'aide de ces définitions, je parviens à des propoſitions qui ſont très-ſimples; je les déduis toutes d'une même équation fondamentale, qui, renfermant une certaine quantité indéterminée à laquelle on peut attribuer différentes valeurs arbitraires, donnera ſucceſſivement, dans chaque cas particulier, toutes les équations déterminées dont on a beſoin pour la ſolution du problême.

Cette équation qui eſt de la plus grande ſimplicité, s'étend généralement à tous les cas imaginables d'équilibre & de mouvement, ſoit que ce mouvement change bruſquement, ou varie par degrés inſenſibles; elle s'applique même à tous les corps, ſoit durs, ſoit doués d'un degré quelconque d'élaſticité; &, ſi je ne me trompe, elle ſuffit ſeule & indépendamment de tout autre principe méchanique, pour réſoudre tous les cas particuliers qui peuvent ſe rencontrer.

Je tire facilement de cette équation un principe général d'équilibre & de mouvement dans les Machines proprement dites,

& de celui-ci dérivent naturellement d'autres principes plus ou moins généraux, dont pluſieurs ſont déjà connus & très-célebres, mais qui ont été juſqu'ici (du moins pour la plupart) ou peu exactement, ou vaguement expliqués, plutôt que rigoureuſement démontrés.

Sans ſortir des principes généraux, j'ai réuni dans un ſcholie, & le plus clairement qu'il m'a été poſſible, les remarques les plus utiles à la pratique, & qui m'ont paru mériter par leur importance un développement particulier; tout le monde répéte que dans les Machines en mouvement on perd toujours en temps ou en vîteſſe ce qu'on gagne en force; mais après la lecture des meilleurs éléments de méchanique, qui ſemblent être la vraie place où doivent ſe trouver la preuve & l'explication de ce principe, ſon étendue & même ſa vraie ſignification ſont-elles faciles à ſaiſir? Sa généralité a-t-elle, pour la plupart des Lecteurs, cette évidence irréſiſtible qui doit caractériſer les vérités mathématiques? S'ils éprouvoient cette conviction frappante, ne

verroit-on pas des Méchaniciens inſtruits de ces ouvrages, renoncer inceſſamment à leurs projets chimériques ? Ne ceſſeroient-ils pas de croire ou de ſoupçonner du moins, malgré tout ce qu'on leur dit, qu'il y a dans les Machines quelque choſe de magique ? Les preuves qu'on leur donne du contraire ne s'étendent qu'aux Machines ſimples ; auſſi ne croient-ils pas celles-ci capables d'un grand effet ; mais on ne leur fait pas voir qu'il doit en être de même dans tous les cas imaginables ; on ne parle que de celui où il y a ſeulement deux forces dans le ſyſtême, & l'on ſe contente d'une analogie : voilà pourquoi ces Méchaniciens eſperent toujours que leur ſagacité leur fera découvrir quelque reſſource inconnue, quelque Machine qui ne ſoit pas compriſe dans les regles ordinaires ; ils ſe croient d'autant plus ſurs de la rencontrer, qu'ils s'éloignent davantage de tout ce qui paroît avoir de la relation avec les Machines uſitées, parce qu'ils s'imaginent que la théorie établie pour celles-ci, ne peut s'étendre à des conſtructions qui leur ſem-

blent n'y avoir aucun rapport ; c'eſt en vain qu'on leur dit que toute Machine ſe réduit au levier : cette aſſertion eſt trop vague & trop tirée, pour qu'on s'y rende ſans un examen profond ; ils ne peuvent ſe perſuader que des Machines qui paroiſſent n'avoir rien de commun avec celles qu'on nomme ſimples, ſoient ſujettes à la même loi, ni qu'on puiſſe prononcer ſur l'inutilité d'un ſecret dont ils n'ont fait confidence à perſonne : de là vient que les idées les plus bizarres, les plus éloignées de la ſimplicité ſi avantageuſe aux Machines, ſont celles qui leur fourniſſent le plus d'eſpoir.

Le moyen de déraciner cette erreur, eſt ſans doute de l'attaquer dans ſa ſource même, en montrant que non-ſeulement dans toutes les Machines connues, mais encore dans toutes les Machines poſſibles, c'eſt une loi inévitable, qu'*on perd toujours en temps ou en vîteſſe ce qu'on gagne en force* ; & d'expliquer clairement ce que ſignifie cette loi ; mais il faut, pour cela, s'élever à la plus grande généralité poſſible, ne s'arrêter à aucune Machine particuliere,

ne s'appuyer ſur aucune analogie ; il faut enfin une démonſtration générale, déduite immédiatement & géométriquement des premiers axiomes de la méchanique : c'eſt ce qu'on a tâché de faire dans cet Eſſai ; on a beaucoup inſiſté ſur ce point fondamental, & je ne ſais ſi l'on aura réuſſi à le mettre dans un aſſez grand jour ; mais en attaquant l'erreur, on s'eſt efforcé d'y ſubſtituer la vérité ; on a montré quel eſt le véritable but des Machines : s'il n'eſt pas raiſonnable d'en attendre des prodiges hors de toute vraiſemblance, on verra qu'il leur reſte encore aſſez d'objets d'utilité, pour exercer la plus brillante imagination.

Les réflexions que je propoſe ſur cette loi, me conduiſent à dire un mot du mouvement perpétuel, & je fais voir non-ſeulement que toute Machine abandonnée à elle-même doit s'arrêter, mais j'aſſigne l'inſtant même où cela doit arriver.

On trouvera encore parmi ces réflexions une des plus intéreſſantes propriétés des Machines, qui, je crois, n'a pas encore été remarquée ; c'eſt que pour leur faire pro-

duire le plus grand effet poſſible, il faut néceſſairement qu'il n'arrive aucune percuſſion, c'eſt-à-dire que le mouvement doit toujours changer par degrés inſenſibles; ce qui donne lieu, entre autres choſes, à quelques remarques ſur les Machines hydrauliques.

Enfin, je termine cet Ecrit par quelques réflexions ſur les loix fondamentales de la communication des mouvements, qui, ſi elles ne ſont pas du goût de tout le monde, ſont du moins aſſez courtes pour ne fatiguer perſonne.

Mais, je le répéte, cet Eſſai n'a pour objet que les Machines en général; chacune d'elles à ſes propriétés particulieres: il ne s'agit ici que de celles qui ſont communes à toutes; ces propriétés, quoique aſſez nombreuſes, ſont en quelque ſorte toutes compriſes dans une même loi fort ſimple: c'eſt cette loi qu'on s'eſt propoſé de rechercher, de démontrer & de développer, en enviſageant toujours les Machines ſous le point de vue le plus général & le plus direct.

ESSAI
SUR LES MACHINES EN GÉNÉRAL.

INTRODUCTION.

I. NOUS ne manquons pas d'excellents Traités ſur les Machines ; les propriétés particulieres à celles dont l'uſage eſt fréquent, à celles ſur-tout qu'on eſt convenu d'appeller ſimples, ont été recherchées & approfondies avec toute la ſagacité poſſible ; mais il me ſemble qu'on ne s'eſt pas encore beaucoup attaché, à développer celles de ces propriétés qui ſont communes à toutes les Machines, & qui, par cette raiſon, ne conviennent pas plus aux cordes qu'au levier, à la vis, ou à toute autre Machine ſoit ſimple ſoit compoſée.

Ce n'eſt pas cependant que les Géometres aient négligé de s'élever aux principes généraux d'équilibre & de mouvement ; mais ce n'eſt pour ainſi dire qu'en paſſant qu'ils ont parlé de leur application à la théorie des Machines pro-

prement dites, & peut-être auſſi n'y a-t-il encore aucun de ces principes qui joigne à une démonſtration rigoureuſe une aſſez grande généralité, pour pouvoir ſuffire ſeul & indépendamment de tout autre, à la ſolution des différentes queſtions qu'on peut propoſer tant ſur l'équilibre que ſur le mouvement des Machines, c'eſt-à-dire, pour réduire toutes les queſtions à une affaire de calcul & de géométrie; ce qui eſt le véritable objet de la méchanique.

II. Parmi les principes plus ou moins généraux qui ont été juſqu'ici propoſés, nous en rappellerons ſeulement deux très-célébres & ſur leſquels nous aurons quelques obſervations à faire.

Le premier eſt celui qui aſſigne pour loi générale de l'équilibre dans les Machines à poids, que le centre de gravité du ſyſtême eſt alors au point le plus bas poſſible; mais quoique cet ancien principe ſoit fort ſimple & fort général, il ne paroît pas qu'on lui ait donné toute l'attention qu'il mérite: c'eſt ſans doute, 1°. parce qu'il eſt ſujet à quelques exceptions, comme tous ceux où il s'agit de *maximum* & de *minimum*; 2°. parce qu'il n'a rapport qu'à une eſpece particuliere de force, qui eſt la peſanteur; 3°. enfin parce qu'il paroît difficile d'en donner une démonſtration générale & rigoureuſe. Mais, 1°. nous allons faire voir qu'en changeant un peu l'énoncé de ce principe, on en peut faire une propoſition très-exacte, très-géométrique & vraie ſans exception; 2°. quoiqu'il n'ait rapport qu'à la peſanteur, cependant il eſt facile de l'appliquer à tous les cas imaginables; il n'y a pour cela qu'à ſubſtituer un poids à la place de chacune des puiſſances qui ſont d'un genre diffé-

rent ; ce qui eſt très-facile, par le moyen d'un fil paſſant ſur une poulie de renvoi ; de ſorte qu'alors il ne reſte plus à ce principe que le défaut d'être indirect ; 3°. enfin, quoiqu'on ne puiſſe le démontrer rigoureuſement ſans remonter juſqu'aux premiers principes de la méchanique, il eſt cependant facile d'en rendre aſſez bien raiſon, pour qu'il ne fût pas poſſible d'en douter, quand même on n'en auroit pas d'autres preuves, comme nous allons le faire voir en attendant la démonſtration exacte que nous tâcherons d'en donner dans la ſuite de cet Eſſai.

Imaginons donc une Machine à laquelle il n'y ait d'autres forces appliquées que des poids, je la ſuppoſe d'ailleurs d'une forme arbitraire, mais qu'on ne lui ait imprimé aucun mouvement : cela poſé, quelle que ſoit la diſpoſition des corps du ſyſtême, il eſt clair que s'il y a équilibre, la ſomme des réſiſtances des points fixes ou obſtacles quelconques, eſtimées dans le ſens vertical contraire à la peſanteur, ſera égale au poids total du ſyſtême ; mais s'il naît un mouvement, une partie de la peſanteur ſera employée à le produire, & ce n'eſt qu'avec le ſurplus, que les points fixes pourront ſe trouver chargés ; donc dans ce cas la ſomme des réſiſtances verticales des points fixes, ſera moindre au premier inſtant que le poids total du ſyſtême : donc de ces deux forces combinées (la peſanteur du ſyſtême & la charge verticale des points fixes) il en réſultera une ſeule force égale à leur différence, & qui pouſſera le ſyſtême de haut en bas comme s'il étoit libre : donc le centre de gravité deſcendra néceſſairement avec une vîteſſe égale à cette différence diviſée par la maſſe totale du ſyſtême : donc ſi le centre de

gravité du ſyſtême ne deſcend pas, il y aura néceſſairement équilibre. Donc en général,

Pour s'aſſurer que pluſieurs poids appliqués à une Machine quelconque doivent ſe faire mutuellement équilibre, il ſuffit de prouver que ſi l'on abandonne cette Machine à elle-même, le centre de gravité du ſyſtême ne deſcendra pas.

III. La conſéquence immédiate de ce principe vrai ſans exception, eſt que ſi le centre de gravité du ſyſtême eſt au point le plus bas poſſible, il y aura néceſſairement équilibre; car, ſuivant cette propoſition, il ſuffit, pour le prouver, de faire voir que le centre de gravité ne deſcendra pas; or, comment deſcendroit-il, puiſque par hypotheſe il eſt au point le plus bas poſſible?

IV. Pour donner encore une application de ce principe, je ſuppoſe qu'il s'agiſſe de trouver la loi générale d'équilibre entre deux poids A & B appliqués à une Machine quelconque; je dis donc qu'alors, en conſéquence du principe précédent, il y aura équilibre entre ces deux poids A & B, ſi, en ſuppoſant que l'un des deux vienne à l'emporter, & la Machine à prendre un petit mouvement, il arrivoit que l'un de ces corps montât pendant que l'autre deſcendroit, & qu'en même temps ces poids fuſſent en raiſon réciproque de leurs vîteſſes eſtimées dans le ſens vertical: en effet, ſi l'on ſuppoſe qu'alors A deſcendît avec la vîteſſe verticale V, tandis que la vîteſſe de B, auſſi eſtimée dans le ſens vertical, ſeroit u, on aura, par hypotheſe, $A : B :: u : V$, ou $AV = Bu$, donc $\frac{AV - Bu}{A + B} = 0$. Cela poſé, puiſque les corps ſont ſuppoſés ſe mouvoir, l'un de haut en bas,

& l'autre de bas en haut, il eſt évident que le premier membre de cette équation eſt la vîteſſe verticale du centre de gravité du ſyſtême; donc ce centre de gravité ne deſcendra pas; donc, par la propoſition précédente, il doit y avoir équilibre.

V. Le ſecond principe ſur lequel nous nous ſommes propoſés de faire quelques obſervations, eſt la fameuſe loi d'équilibre de *Deſcartes*; elle revient à ce que deux puiſſances en équilibre ſont toujours, en raiſon réciproque de leur vîteſſe, eſtimées dans le ſens de ces forces, lorſqu'on ſuppoſe que l'une des deux vient à l'emporter infiniment peu ſur l'autre, de maniere qu'il en naiſſe un petit mouvement.

Mais quoique cette propoſition ſoit très-belle & qu'on la regarde ordinairement comme le principe fondamental de l'équilibre dans les Machines, elle eſt cependant infiniment moins générale que celle qui a été citée en premier lieu, car elle s'applique uniquement au cas où il y a ſeulement deux puiſſances dans le ſyſtême, & d'ailleurs elle ſe déduit très-facilement de ce qui vient d'être dit au ſujet des deux poids *A* & *B*, puiſqu'on ramene viſiblement l'un de ces cas à l'autre, en ſubſtituant, par des poulies de renvoi, des poids à la place des forces dont on cherche le rapport.

De plus, il eſt à remarquer que ce principe n'exprime pas les conditions de l'équilibre entre deux puiſſances, auſſi complétement que celui qui a été cité en premier lieu; car il ne donne que le rapport des quantités de force qui ſe font équilibre, au lieu que celui-ci donne auſſi en quelque ſorte le rapport de leurs directions; par exemple, dans le cas d'équilibre

entre deux poids, le principe de *Deſcartes* apprend ſeulement que les poids doivent être en raiſon réciproque de leurs vîteſſes verticales ; mais il n'indique pas, comme le premier, que l'un de ces corps doit néceſſairement monter pendant que l'autre deſcendra ; pour qu'un treuil, par exemple, à la roue & au cylindre duquel ſont ſuſpendus des poids par des cordes, demeure en équilibre, il ne ſuffit pas que le poids appliqué à la roue ſoit à celui du cylindre, comme le rayon du cylindre eſt au rayon de la roue ; il faut encore que ces poids tendent à faire tourner la Machine en ſens contraire l'un de l'autre, c'eſt-à-dire qu'ils ſoient placés de différents côtés, par rapport à l'axe, ſinon leurs efforts étant conſpirants, mettront la Machine en mouvement : il eſt donc évident que ce qui rend le principe de *Deſcartes* incomplet, c'eſt qu'en déterminant le rapport des puiſſances, quant à leurs valeurs ou intenſités, il n'exprime pas que ces puiſſances doivent faire des efforts oppoſés, ni en quoi conſiſte cette oppoſition d'efforts : il eſt clair en effet que pour l'équilibre il faut que l'une des forces réſiſte tandis que l'autre ſollicite ; or, c'eſt ce qui n'arrive pas dans le treuil qui vient d'être allégué pour exemple ; mais qu'eſt-ce en général qui diſtingue les forces ſollicitantes des forces réſiſtantes ? C'eſt, ce me ſemble, ce qui n'a pas encore été déterminé : on verra dans cet Eſſai que la différence caractériſtique de ces forces conſiſte dans l'angle qu'elles forment avec les directions de leurs vîteſſes, de ſorte que les unes font toujours avec leurs vîteſſes des angles aigus, tandis que les autres font des angles obtus avec les leurs.

Enfin,

Enfin, un défaut qu'il me paroît qu'on peut encore reprocher au principe de *Deſcartes*, ainſi qu'à tous ceux où il s'agit du petit mouvement qui naîtroit dans le ſyſtême, ſi l'équilibre venoit à être troublé, c'eſt qu'ils n'indiquent pas la maniere de déterminer ce petit mouvement; or, s'il faut pour cela avoir recours à quelque nouveau principe méchanique, le premier n'eſt donc pas ſuffiſant; & ſi on peut le déterminer par pure géométrie, quelle en eſt la maniere? C'eſt ce que ne dit pas le principe: & qu'on ne diſe pas que la proportion indiquée par le principe, a toujours lieu, quel que puiſſe être le mouvement, pourvu qu'il ſoit poſſible, c'eſt-à-dire compatible avec l'impénétrabilité des corps; car ce ſeroit une erreur; & nous ferons voir dans la ſuite que ces mouvements ſont aſſujettis à certaines conditions, en conſéquence deſquelles j'ai cru devoir leur donner le nom de *mouvements géométriques.*

On peut faire la même remarque ſur tous les principes où l'on propoſeroit de conſidérer la Machine dans deux états infiniment proches l'un de l'autre; car pour déterminer quels ſont ces deux états, c'eſt-à-dire quel mouvement il faudroit que la Machine prît pour paſſer de l'un à l'autre, il faut ou employer de nouveaux principes méchaniques conjointement avec celui qu'on propoſe; ce qui rendroit celui-ci inſuffiſant; ou la géométrie ſuffit; & dans ce cas c'eſt un défaut dans le principe, de ne pas faire connoître les conditions géométriques auxquelles ce mouvement eſt aſſujetti.

VI. Les deux loix dont on vient de parler, ſont bornées l'une & l'autre au cas de l'équilibre; on paſſe aiſément de ce cas à celui du mou-

vement, par le principe de dynamique dû à *M. d'Alembert ;* mais on en a auſſi trouvé pluſieurs autres qui s'appliquent immédiatement au cas du mouvement ; tel eſt celui de la conſervation des forces vives dans le choc des corps parfaitement élaſtiques, lequel eſt d'autant plus général, qu'il s'étend au cas même où le mouvement paſſe bruſquement d'un état à l'autre ; mais il paroît qu'on n'a gueres ſongé à l'uſage qu'on en pouvoit faire dans la théorie des Machines proprement dites ; il eſt cependant évident que cette loi doit avoir ſon analogue dans le choc des corps durs ; & comme on prend ordinairement ceux-ci pour ſervir de terme de comparaiſon, ce principe transféré aux corps durs avec la modification qu'exige la différence de leur nature, ne peut manquer d'être plus utile que la conſervation même dont il s'agit : nous ferons voir en effet qu'on en déduit avec la plus grande facilité pluſieurs vérités capitales, & particuliérement la conſervation des forces vives dans un ſyſtême de corps durs dont le mouvement change par degrés inſenſibles ; principe dont l'utilité dans la théorie des Machines eſt ſi connue : on verra en même temps par-là une relation intime entre ces deux conſervations de forces vives ; on en tire également le principe de *Deſcartes*, & même, en le généraliſant, la loi d'équilibre dans les Machines à poids dont il a été queſtion ci-deſſus ; ce principe enfin, après lui avoir donné l'extenſion dont il eſt ſuſceptible, nous a paru renfermer toutes les loix de l'équilibre & du mouvement, & nous n'avons pas cru pouvoir en adopter un meilleur pour ſervir de baſe à notre théorie.

VII. Cet Eſſai ſera diviſé en deux parties ;

dans la premiere, on traitera des principes généraux de l'équilibre & du mouvement dans les Machines ; & dans la ſeconde, on recherchera les propriétés des Machines proprement dites, c'eſt-à-dire, de ce à quoi le nom de Machines a été plus ſpécialement affecté, ſans cependant s'arrêter jamais à aucune Machine particuliere.

PREMIERE PARTIE.

Principes généraux.

VIII. Lorſqu'un corps agit ſur un autre, c'eſt toujours immédiatement, ou par l'entremiſe de quelque corps intermédiaire ; ce corps intermédiaire eſt en général ce qu'on appelle une Machine ; le mouvement que perd à chaque inſtant chacun des corps appliqués à cette Machine, eſt en partie abſorbé par la Machine même, & en partie reçu par les autres corps du ſyſtême ; mais comme il peut arriver que l'objet de la queſtion ſoit uniquement de trouver l'action réciproque des corps appliqués aux corps intermédiaires, ſans qu'on ait beſoin d'en connoître l'effet ſur le corps intermédiaire même, on a imaginé, pour ſimplifier la queſtion, de faire abſtraction de la maſſe même de ce corps, en lui conſervant d'ailleurs toutes les autres propriétés de la matiere ; dès-lors la ſcience des Machines eſt devenue en quelque ſorte une branche iſolée de méchanique, dans laquelle il s'agit de conſidérer l'action réciproque des différentes parties d'un ſyſtême de corps, parmi

leſquelles il s'en trouve qui, privés de l'inertie commune à toutes parties de la matiere telle qu'elle exiſte dans la nature, ont retenu le nom de Machines.

IX. Cette abſtraction pouvoit ſimplifier dans certains cas particuliers, où les circonſtances indiquoient ceux des corps dont il convenoit de négliger la maſſe, pour arriver plus facilement au but; mais on conçoit que la théorie des Machines en général eſt devenue réellement plus compliquée qu'auparavant; car alors cette théorie étoit renfermée dans celle du mouvement des corps tels que la nature nous les offre; mais à préſent il faut conſidérer à la fois deux ſortes de corps, les uns tels qu'ils exiſtent réellement, les autres dépouillés en partie de leurs propriétés naturelles; or, il eſt clair que le premier de ces problêmes eſt un cas particulier de celui-ci; donc celui-ci eſt plus compliqué que l'autre: auſſi, quoiqu'on parvienne aiſément par de pareilles hypotheſes, à trouver les loix de l'équilibre & du mouvement dans chaque Machine particuliere, telle que le levier, le treuil, la vis, il en réſulte un aſſemblage de connoiſſances dont la liaiſon s'apperçoit difficilement, & ſeulement par une eſpece d'analogie; ce qui doit néceſſairement arriver tant qu'on aura recours à la figure particuliere de chaque Machine, pour démontrer une propriété qui lui eſt commune avec toutes les autres: ces propriétés communes étant celles que nous avons en vue dans cet Eſſai, il eſt clair que nous ne parviendrons à les trouver qu'en faiſant abſtraction des formes particulieres: commençons donc par ſimplifier l'état de la queſtion, en ceſſant de conſidérer dans un même ſyſtême des corps de

différente nature ; rendons enfin aux Machines leur force d'inertie ; il nous ſera facile, après cela, d'en négliger la maſſe dans le réſultat ; nous ſerons maîtres d'y avoir égard ou non ; & partant, la ſolution du problême ſera auſſi générale, en même temps quelle ſera plus ſimple.

X. La ſcience des Machines en général ſe réduit donc à la queſtion ſuivante.

Connoiſſant le mouvement virtuel d'un ſyſtême quelconque de corps, (c'eſt-à-dire celui que prendroit chacun de ces corps, s'il étoit libre) trouver le mouvement réel qui aura lieu l'inſtant ſuivant, à cauſe de l'action réciproque des corps, en les conſidérant tels qu'ils exiſtent dans la nature, c'eſt-à-dire comme doués de l'inertie commune à toutes les parties de la matiere.

XI. Or, cette queſtion renfermant évidemment toute la méchanique, il faut, pour procéder avec clarté, remonter juſqu'aux premieres loix que la nature obſerve dans la communication des mouvements : on peut les réduire en général à deux, que voici.

Loix fondamentales de l'équilibre & du mouvement.

Premiere loi. *La réaction eſt toujours égale & contraire à l'action.*

Cette loi conſiſte en ce que tout corps qui change ſon état de repos ou de mouvement uniforme & rectiligne, ne le fait jamais que par l'influence ou action de quelqu'autre corps auquel il imprime en même temps une quantité de mouvement égale & directement oppoſée à celle qu'il en reçoit ; c'eſt-à-dire que la vîteſſe

qu'il prend réellement l'inſtant d'après, eſt la force réſultante de celle que lui imprime cet autre corps, & de celle qu'il auroit eue ſans cette derniere force. Tout corps réſiſte donc à ſon changement d'état, & cette réſiſtance qu'on nomme force d'inertie, eſt toujours égale & directement oppoſée à la quantité de mouvement qu'il reçoit, c'eſt-à-dire à la quantité de mouvement qui, compoſée avec celle qu'il avoit immédiatement avant le changement, produit pour réſultante la quantité de mouvement qu'il doit réellement avoir immédiatement après ; ce qui s'exprime encore en diſant que, dans l'action réciproque des corps, la quantité de mouvement perdue par les uns, eſt toujours gagnée par les autres, en même temps & dans le même ſens.

Seconde loi. *Lorſque deux corps durs agiſſent l'un ſur l'autre, par choc ou preſſion, c'eſt-à-dire en vertu de leur impénétrabilité, leur viteſſe relative, immédiatement après l'action réciproque, eſt toujours nulle.*

En effet, on obſerve conſtamment que, ſi deux corps durs viennent à ſe choquer, leurs viteſſes, immédiatement après le choc, eſtimées perpendiculairement à leur ſurface commune au point de contingence, ſont égales ; de même que s'ils ſe tiroient par des fils inextenſibles, ou ſe pouſſoient par des verges incompreſſibles, leurs viteſſes eſtimées dans le ſens de ce fil ou de cette verge, ſeroient néceſſairement égales : d'où il ſuit que leur viteſſe relative, c'eſt-à-dire celle par laquelle ils s'approchent ou s'éloignent l'un de l'autre, eſt dans tous les cas nulle au premier inſtant.

De ces deux principes, il eſt aiſé de tirer les loix du choc des corps durs, & de conclure

par conſéquent les deux autres principes ſecondaires dont l'uſage eſt continuel en méchanique : ſavoir.

1°. *Que l'intenſité du choc ou de l'action qui s'exerce entre deux corps qui ſe rencontrent, ne dépend point de leurs mouvements abſolus, mais ſeulement de leur mouvement relatif.* 2°. *Que la force ou quantité de mouvement qu'ils exercent l'un ſur l'autre, par le choc, eſt toujours dirigée perpendiculairement à leur ſurface commune au point de contingence.*

XII. Des deux loix fondamentales, la *premiere* convient généralement à tous les corps de la nature, ainſi que les deux loix ſecondaires qu'on vient de voir, & la *ſeconde* eſt ſeulement pour les corps durs; mais comme ceux qui ne le ſont pas ont des degrés d'élaſticité différents, on ramene ordinairement les loix de leur mouvement à celles des corps durs qu'on prend pour terme de comparaiſon, c'eſt-à-dire qu'on regarde les corps élaſtiques, comme compoſés d'une infinité de corpuſcules durs ſéparés par de petites verges compreſſibles, auxquelles on attribue toute la vertu élaſtique de ces corps; de ſorte qu'on ne conſidere, à proprement parler, dans la nature, que des corps animés de différentes forces motrices : nous ſuivrons cette méthode, comme la plus ſimple; ainſi nous réduirons la queſtion à la recherche des loix qu'obſervent les corps durs, & nous en ferons enſuite quelques applications aux cas où les corps ſont doués de différents degrés d'élaſticité.

XIII. Cet Eſſai ſur les Machines n'étant point un Traité de méchaniqne, mon but n'eſt pas d'expliquer en détail ni de prouver les loix

fondamentales que je viens de rapporter; ce ſont des vérités que tout le monde ſent très-bien, dont on convient généralement, & qui ſe manifeſtent avec la plus grande évidence dans tous les phénomenes de la nature; cela me ſuffit pour remplir mon objet, qui eſt uniquement de tirer de ces loix, une méthode ſimple & exacte pour trouver l'état de repos ou de mouvement qui en réſulte dans un ſyſtême quelconque de corps, c'eſt-à-dire de préſenter ces mêmes loix ſous une forme qui puiſſe en faciliter l'application à chaque cas particulier.

XIV. Imaginons donc un ſyſtême quelconque de corps durs dont le mouvement virtuel donné ſoit changé par leur action réciproque en un autre qu'il s'agit de trouver; & pour embraſſer la queſtion dans toute ſa généralité, ſuppoſons que le mouvement puiſſe changer ſubitement, ou varier par degrés inſenſibles; enfin, comme il peut ſe rencontrer des point fixes, ou obſtacles quelconques, conſidérons-les tels qu'ils ſont en effet, c'eſt-à-dire comme des corps ordinaires faiſant eux-mêmes partie du ſyſtême propoſé, mais fixément arrêtés dans le lieu où ils ſont placés.

XV. Pour parvenir à la ſolution de ce problême, obſervons d'abord que toutes les parties du ſyſtême étant ſuppoſées parfaitement dures, c'eſt-à-dire incompreſſibles & inextenſibles, on peut viſiblement, quel qu'il ſoit, le regarder comme compoſé d'une infinité de corpuſcules durs, ſéparés les uns des autres, ou par de petites verges incompreſſibles, ou par de petits fils inextenſibles; car, lorſque deux corps ſe choquent, ſe pouſſent, ou tendent en général à ſe rapprocher l'un de l'autre ſans pouvoir le faire,

à cauſe de leur impénétrabilité, on peut concevoir entre les deux une petite verge incompreſſible, & ſuppoſer que le mouvement ſe tranſmet de l'un à l'autre ſuivant cette verge; & de même ſi deux corps tendent à ſe ſéparer, on peut concevoir qu'ils ſont retenus l'un à l'autre par un petit fil inextenſible, ſuivant lequel ſe propage le mouvement : cela poſé, conſidérons ſucceſſivement l'action de chacun de ces petits corpuſcules ſur tous ceux qui lui ſont adjacents, c'eſt-à-dire examinons deux à deux tous ces petits corpuſcules ſéparés l'un de l'autre par une petite verge incompreſſible ou par un petit fil inextenſible, & voyons ce qui en doit réſulter dans le ſyſtême général de tous ces corpuſcules : pour cela nommons

m' & m'' Les maſſes des corpuſcules adjacents.

V' & V'' Les vîteſſes qu'ils doivent avoir l'inſtant ſuivant.

F' L'action de m'' ſur m', c'eſt-à-dire la force ou quantité de mouvement que le premier de ces corpuſcules imprime à l'autre.

F'' La réaction de m' ſur m''.

q' & q'' Les angles formés par les directions de V' & F', & par celles de V'' & F''.

Cela poſé, la vîteſſe réelle de m' étant V', cette vîteſſe eſtimée dans le ſens de F' ſera $V' \cos q'$, de même la vîteſſe de m'' eſtimée dans le ſens de F'' ſera $V'' \cos q''$; de même la vîteſſe de m'' eſtimée dans le ſens de F'' ſera $V'' \cos q''$. Donc, puiſque par la ſeconde loi fondamentale, les corps doivent aller de compagnie, on aura $V' \cos q' + V'' \cos q'' = 0$ (A); donc par la premiere loi fondamentale on aura auſſi $F' V' \cos q' + F'' V'' \cos q'' = 0$ (B); car ſi m' & m''

ſont mobiles tous les deux, il eſt clair, par cette loi, qu'on a $F' = F''$, donc à cauſe de l'équation (A) on aura auſſi l'équation (B); & ſi l'un des deux, m' par exemple, eſt fixe ou fait partie d'un obſtacle, on aura $V' \cos q' = 0$; donc à cauſe de l'équation (A) on aura auſſi $V'' \cos q'' = 0$; donc l'équation (B) aura encore lieu; donc cette équation (B) eſt vraie pour tous les corpuſcules du ſyſtême pris deux à deux: imaginant donc une pareille équation pour tous ces corps pris en effet deux à deux, & ajoutant enſemble toutes ces équations, ou ce qui revient au même, intégrant l'équation (B), on aura pour tout le ſyſtême;
$\int F' V' \cos q' + \int F'' V'' \cos q'' = 0$: c'eſt-à-dire que la ſomme des produits des quantités de mouvement que s'impriment réciproquement les corpuſcules ſéparés par chacun des petits fils inextenſibles, ou des petites verges incompreſſibles, de ces quantités, dis-je, multipliées chacune par la vîteſſe du corpuſcule auquel elle eſt imprimée, eſtimée dans le ſens de cette force, eſt égale à zero.

Cela poſé, abandonnant les dénominations précédentes, nommons

La maſſe de chacun des corpuſcules du ſyſtême. m

Sa vîteſſe virtuelle, c'eſt-à-dire celle qu'il prendroit s'il étoit libre. W

Sa vîteſſe réelle. V

La vîteſſe qu'il perd, de ſorte que W ſoit la réſultante de V & de cette vîteſſe. U

La force ou quantité de mouvement qu'imprime à m chacun des corpuſcules adjacents, & par l'entremiſe deſquels il reçoit évidemment tout le mouvement qui lui eſt tranſmis des différentes parties du

ſyſtême. F

L'angle compris entre les directions de W & V. X

L'angle compris entre les directions de W & U. Y

L'angle compris entre les directions de V & U. Z

L'angle compris entre les directions de V & F. q

On aura donc pour tout le ſyſtême $\int F V \operatorname{cof} q = 0$, ou $\int V F \operatorname{cof} q = 0$ (C); à préſent il faut obſerver que la vîteſſe de m avant l'action réciproque, étant W, cette vîteſſe eſtimée dans le ſens de V ſera $W \operatorname{cof} X$; donc $V - W \operatorname{cof} X$, eſt la vîteſſe gagnée par M dans le ſens de V; donc $m (V - W \operatorname{cof} X)$ eſt la ſomme des forces F qui agiſſent ſur m eſtimées chacune dans le ſens de V; donc $m V (V - W \operatorname{cof} X)$ eſt la même ſomme multipliée par V; or, à chaque molécule répond une pareille ſomme, & de plus la ſomme totale de toutes ces ſommes particulieres eſt viſiblement pour tout le ſyſtême $\int V F \operatorname{cof} q$; donc $\int m V (V - W \operatorname{cof} X) = \int V F \operatorname{cof} q$; ajoutant à cette équation l'équation (C), il vient $\int m V (V - W \operatorname{cof} X) = 0$ (D): mais W étant la réſultante de V & U, il eſt clair qu'on aura $W \operatorname{cof} X = V + U \operatorname{cof} Z$; ſubſtituant donc cette valeur de $W \operatorname{cof} X$ dans l'équation (D), elle ſe réduira à $\int m V U \operatorname{cof} Z = 0$ (E); *premiere équation fondamentale.*

XVI. Imaginons maintenant qu'au moment où le choc va ſe faire, le mouvement actuel du ſyſtême ſoit tout à coup détruit, & qu'on lui faſſe prendre à la place ſucceſſivement deux autres mouvements arbitraires, mais égaux &

directement opposés l'un à l'autre, c'eſt-à-dire qu'on le faſſe partir ſucceſſivement de ſa poſition actuelle, avec deux mouvements tels qu'en vertu du ſecond, chaque point du ſyſtême ait au premier inſtant une vîteſſe égale & directement oppoſée à celle qu'il auroit eue en vertu du premier de ces mouvements : cela poſé, il eſt clair, 1°. que la figure du ſyſtême étant donnée, cela peut ſe faire d'une infinité de manieres différentes, & par des opérations purement geométriques ; c'eſt pourquoi j'appellerai ces mouvements *mouvements géométriques* : c'eſt-à-dire que *ſi un ſyſtême de corps part d'une poſition donnée, avec un mouvement arbitraire, mais tel qu'il eût été poſſible auſſi de lui en faire prendre un autre tout à fait égal & directement oppoſé ; chacun de ces mouvements ſera nommé mouvement* (1) *géométrique ;* 2°. je dis qu'en

(1) Pour diſtinguer par un exemple très-ſimple les mouvements que j'appelle *géométriques*, de ceux qui ne le ſont pas, imaginons deux globes qui ſe pouſſent l'un l'autre, mais du reſte libres & dégagés de tout obſtacle ; imprimons à ces globes des vîteſſes égales & dirigées dans le même ſens ſuivant la ligne des centres ; ce mouvement eſt *géométrique*, parce que les corps pourroient de même être mus en ſens contraire avec la même vîteſſe, comme il eſt évident : mais ſuppoſons maintenant qu'on imprime à ces corps des mouvements égaux & dirigés dans la ligne des centres, mais qui au lieu d'être, comme précédemment, dirigés dans le même ſens, tendent au contraire à les éloigner l'un de l'autre ; ces mouvements, quoique poſſibles, ne ſont pas ce que j'entends par *mouvements géométriques ;* parce que ſi l'on vouloit faire prendre à chacun de ces mobiles une vîteſſe égale & contraire à celle qu'il reçoit dans ce premier mouvement, on en ſeroit empêché par l'impénétrabilité des corps.

vertu de ce mouvement géométrique, les corpuſcules voiſins qui peuvent être cenſés ſe

---

De même ſi deux corps ſont attachés aux extrêmités d'un fil inextenſible, & qu'on faſſe prendre au ſyſtême un mouvement arbitraire, mais tel que la diſtance des deux corps ſoit conſtamment égale à la longueur du fil, ce mouvement ſera *géométrique*, parce que les corps peuvent prendre un pareil mouvement dans un ſens tout contraire; mais ſi ces mobiles ſe rapprochent l'un de l'autre, le mouvement n'eſt point *géométrique*, parce qu'ils ne pourront prendre un mouvement égal & contraire, ſans s'éloigner l'un de l'autre; ce qui eſt impoſſible, à cauſe de l'inextenſibilité du fil.

En général il eſt évident que, quelle que ſoit la figure du ſyſtême, & le nombre des corps, ſi on peut lui faire prendre un mouvement tel qu'il n'en réſulte aucun changement dans la poſition reſpective des corps, ce mouvement ſera *géométrique*; mais il ne s'enſuit pas de là qu'il n'y ait aucun autre moyen de ſatisfaire à cette condition, comme nous allons le montrer par quelques exemples.

Imaginons un treuil à la roue & au cylindre duquel ſoient attachés des poids ſuſpendus par des cordes; ſi l'on fait tourner la machine, de maniere que le poids attaché à la roue deſcende d'une hauteur égale à ſa circonférence, tandis que celui du cylindre montera d'une hauteur égale à la ſienne, ce mouvement ſera *géométrique*, parce qu'il eſt également poſſible de faire deſcendre le poids attaché au cylindre d'une hauteur égale à ſa circonférence, tandis que le poids attaché à la roue monteroit d'une hauteur égale à la ſienne; mais ſi tandis qu'on fera deſcendre le poids attaché à la roue d'une hauteur égale à ſa circonférence, on faiſoit monter le poids attaché au cylindre d'une hauteur plus grande que ſa circonférence, le mouvement ne ſeroit pas *géométrique*, parce que le mouvement égal & contraire ſeroit viſiblement impoſſible.

Si pluſieurs corps ſont attachés aux extrêmités de différents fils réunis par les autres extrêmités à un même nœud; & qu'on faſſe prendre au ſyſtême un mouvement tel que chacun des corps reſte conſtamment éloigné du nœud d'une même quantité égale à la lon-

pouſſer par une verge, ou ſe tirer par un fil, ne ſe rapprocheront ni ne s'éloigneront l'un de l'autre au premier inſtant, c'eſt-à-dire qu'au premier inſtant de ce mouvement géométrique, la vîteſſe relative de ces corpuſcules voiſins ſera nulle ; en effet, il eſt clair, premiérement, que ſi *m* eſt ſéparé d'un corpuſcule voiſin par une verge incompreſſible, il ne pourra s'en rappro-

---

gueur du fil auquel il eſt attaché, ce mouvement ſera *géométrique*, quand même les différents corps ſe rapprocheroient les uns des autres : mais ſi quelqu'uns d'eux ſe rapprochoient du nœud, le mouvement ne ſeroit plus *géométrique*, parce que les fils étant ſuppoſés inextenſibles, le mouvement égal & contraire ſeroit viſiblement impoſſible.

Si deux corps ſont attachés aux extrêmités d'un fil dans lequel ſoit enfilé un grain mobile, il ſuffira, pour que le mouvement ſoit *géométrique*, que la ſomme des diſtances du grain mobile à chacun des deux autres corps, ſoit conſtamment égale à la longueur du fil ; de ſorte que ſi ces deux corps ſont fixes, le grain mobile ne ſortira pas d'une courbe elliptique.

Si un corps ſe meut ſur une ſurface courbe, par exemple dans la concavité d'une calotte ſphérique, le mouvement ſera *géométrique*, tant que le corps ſe mouvra tangentiellement à la ſurface ; mais s'il s'en écarte, le mouvement ceſſera d'être *géométrique*, parce que le mouvement égal & contraire eſt viſiblement impoſſible.

D'après tout cela, il eſt évident, que quoiqu'en faiſant prendre à un ſyſtême un mouvement *géométrique*, les différents corps de ce ſyſtême puiſſent ſe rapprocher les uns des autres, cependant on peut dire que les corpuſcules voiſins, conſidérés deux à deux, ne tendent au premier inſtant ni à ſe rapprocher ni à s'éloigner, comme je le prouve au long dans le texte : les corps n'exercent donc aucune action les uns ſur les autres, en vertu d'un pareil mouvement ; ces mouvements ſont donc abſolument indépendants des regles de la dynamique ; & c'eſt pour cette raiſon que je les ai appellés *géométriques*.

cher ; & que s'il en eſt ſéparé par un fil inextenſible, il ne pourra s'en éloigner : ſecondement, je dis que s'il en eſt ſéparé par une verge incompreſſible, il ne pourra non-plus s'en éloigner ; car s'il s'en éloignoit, il eſt clair qu'en vertu du mouvement égal & directement oppoſé, lequel eſt auſſi poſſible, par hypotheſe, il s'en rapprocheroit ; ce qui ne ſe peut à cauſe de l'incompreſſibilité de la verge ; par la même raiſon enfin, il eſt viſible que ſi c'eſt un fil qui ſépare m du corpuſcule voiſin, il ne pourra s'en rapprocher, puiſqu'alors il ſeroit poſſible qu'il s'en éloignât par un mouvement égal & directement oppoſé ; or, cela ne ſe peut, à cauſe de l'inextenſibilité du fil ; donc, quel que ſoit le mouvement géométrique imprimé au ſyſtême, la vîteſſe relative de tous ces corpuſcules voiſins qui agiſſent les uns ſur les autres, pris deux à deux, ſera nulle au premier inſtant : cela poſé, nommons u la vîteſſe abſolue qu'aura m dans le premier inſtant, en vertu de ce mouvement géométrique, & ζ l'angle compris entre les directions de u & U ; il eſt clair que les corpuſcules m ne tendront point à ſe rapprocher ni à s'éloigner les uns des autres, en vertu des vîteſſes u, ſi on les ſuppoſe animés en même temps de ces vîteſſes u & des vîteſſes U ; ils ne tendront pas à ſe rapprocher ou à s'éloigner davantage que s'ils étoient animés des ſeules vîteſſes U ; donc l'action réciproque exercée entre les différentes parties du ſyſtême ſera la même, ſoit que chaque molécule ſoit animée de la ſeule vîteſſe U, ou des deux vîteſſes u & U ; mais ſi chaque molécule étoit animée de la ſeule vîteſſe U, il y auroit viſiblement équilibre ; donc ſi elle eſt animée à la fois des deux vîteſſes

U & u, ou d'une vîteſſe unique qui en ſoit la réſultante, U ſera encore la vîteſſe perdue par m; & partant, u ſera la vîteſſe réelle, après l'action réciproque : donc, par la même raiſon qu'on a eu la premiere équation fondamentale (E), on aura auſſi $\int m\, u\, U \cos \zeta = 0$ (F); *ſeconde équation fondamentale.*

Il eſt bien facile à préſent de réſoudre le problême que nous nous ſommes propoſés, car l'équation précédente devant avoir lieu, quelle que ſoit la valeur de u, & ſa direction, pourvu que le mouvement auquel elle ſe rapporte ſoit géométrique; il eſt clair qu'en attribuant ſucceſſivement à cette indéterminée différentes valeurs & directions arbitraires, on obtiendra toutes les équations néceſſaires entre les quantités inconnues, d'où dépend la ſolution du problême, & des quantités ou données ou priſes à volonté.

XVII. Pour achever de mettre cette ſolution dans tout ſon jour, il ſuffira d'en donner un exemple :

Suppoſons donc que tout le ſyſtême ſe réduiſe à un aſſemblage de corps liés entre eux par des verges inflexibles, de ſorte que toutes les parties du ſyſtême ſoient forcées de conſerver toujours leurs mêmes poſitions reſpectives; mais qu'il n'y ait aucun point fixe ou obſtacle quelconque; l'équation (F) va nous donner la ſolution de ce problême, en attribuant ſucceſſivement à u différentes valeurs & différentes directions.

1°. Comme les vîteſſes u ne ſont aſſujetties à aucune condition, ſinon que le mouvement du ſyſtême, en vertu duquel les corpuſcules m ont ces vîteſſes, ſoit *géométrique*, il eſt évident

dent que nous pouvons d'abord les ſuppoſer toutes égales & paralleles à une même ligne donnée ; alors u étant conſtante, ou la même pour tous les points du ſyſtême, l'équation (F) ſe réduira à $\int m U \operatorname{cof} \zeta = 0$; ce qui nous apprend, que la ſomme des forces perdues par l'action réciproque des corps, dans le ſens arbitraire de u, eſt nulle, & que par conſéquent celle qui reſte eſt la même que ſi chaque corps eût été libre : *principe très-connu.*

2°. Imaginons maintenant qu'on faſſe tourner tout le ſyſtême au tour d'un axe donné, de ſorte que chacun des points décrira une circonférence autour de cet axe, & dans un plan qui lui ſera perpendiculaire ; ce mouvement eſt viſiblement géométrique ; donc l'équation (F) a lieu ; mais alors, en nommant R la diſtance de m à l'axe, il eſt clair qu'on a $u = AR$, A étant la même pour tous les points ; donc l'équation (F) ſe réduit à $\int m R U \operatorname{cof} \zeta = 0$; c'eſt-à-dire que la ſomme des moments des forces perdues par l'action réciproque, relativement à un axe quelconque, eſt nulle : *autre principe très-connu.*

3°. Nous pourrions encore attribuer à u d'autres valeurs ; mais cela ſeroit inutile & meneroit à des équations déjà renfermées dans les précédentes ; car on ſait que celles-ci ſuffiſent pour réſoudre la queſtion, ou du moins pour la réduire à une affaire de pure géométrie.

Remarque I.

XVIII. Le but qu'on ſe propoſe, en imprimant un mouvement géométrique, eſt de changer l'état du ſyſtême, ſans cependant altérer

l'action réciproque des corps qui le compoſent; afin de ſe procurer par-là des rapports entre ces forces exercées & inconnues, & les viteſſes arbitraires que prennent les corps, en vertu de ces différents mouvements géométriques; mais il faut remarquer qu'il y a un cas où les mouvements géométriques ne ſont pas les ſeuls qui puiſſent remplir le même objet, & où quelques autres mouvements peuvent s'employer de même, pour tirer de l'équation générale (F) des équations déterminées; ce cas arrive lorſque ces autres mouvements, ſans être abſolument géométriques, le deviennent cependant, en ſupprimant ſeulement quelques-uns des petits fils ou verges que nous avons imaginés interpoſés entre les particules adjacentes du ſyſtême, lors dis-je que ces fils ou verges qui étoient ſuppoſés tranſmettre le mouvement d'un corpuſcule à l'autre n'en tranſmettent en effet aucun; c'eſt-à-dire lorſque la tenſion de quelques-uns de ces fils, ou la preſſion de quelques-unes de ces verges, eſt égale à zero : car alors, en ſupprimant ces fils & verges, dont les tenſions ou preſſions ſont nulles, on ne change évidemment rien du tout à l'action réciproque des corps, & cependant il eſt poſſible qu'on rende par-là le ſyſtême ſuſceptible de quelques mouvements géométriques, qui ne pourroient avoir lieu ſans cela : rien n'empêche donc alors qu'on ne regarde comme anéantis ces fils & verges, puiſqu'ils n'influent en rien ſur l'état du ſyſtême, & qu'on n'emploie par conſéquent comme géométriques, les mouvements qui, ſans l'être effectivement, le deviennent cependant par cette ſuppreſſion.

De plus, lorſque deux corps ſont contigus l'un à l'autre, c'eſt la même choſe évidemment de ſupprimer la petite verge que nous avons

imaginée interposée entre deux, pour les empêcher de se rapprocher, ou de supposer que ces corps soient perméables l'un à l'autre, c'est-à-dire qu'ils puissent se pénétrer aussi facilement que l'espace vuide est pénétré par tous les corps; d'où il suit évidemment qu'en général, dans un système quelconque de corps agissant les uns sur les autres, soit immédiatement, soit par des fils & verges, c'est-à-dire par l'entremise d'une Machine quelconque, s'il se trouve quelque fil, verge ou autre partie quelconque de la Machine qui n'exerce aucune action sur les corps qui lui sont appliqués, c'est-à-dire qui puisse être anéantie, sans qu'il en résulte aucun changement dans l'action réciproque de ces corps, on pourra traiter comme géométriques tous les mouvements qui, sans l'être effectivement, le deviendroient par cette suppression, de même que ceux qui le deviendroient aussi, en regardant comme librement perméables l'un à l'autre ceux des corps entre lesquels il ne s'exerce aucune pression, quoiqu'ils soient adjacents. Voici maintenant quelle est l'utilité de cette observation.

Si lorsqu'on entreprend la solution de quelque problême, on sait d'avance que telle partie de la Machine n'exerce aucune action sur les autres parties du système, on pourra supposer que cette partie de Machine est totalement anéantie, & chercher le mouvement du système d'après cette hypothese, c'est-à-dire en traitant comme géométriques tous les mouvements qui le deviendroient réellement par cette supposition; & de même, si l'une des conditions données du problême, est que tels corps adjacents n'exercent l'un sur l'autre aucune pression, on exprimera cette condition, en regardant ces

deux corps comme perméables l'un à l'autre ; c'eſt-à-dire en traitant comme géométriques les mouvements qui le deviendroient en effet par cette ſuppoſition.

Mais s'il arrivoit qu'on ignorât ſi cette preſſion eſt réelle ou nulle, il faudroit chercher le mouvement du ſyſtême, en ſuppoſant d'abord à volonté l'un ou l'autre ; on ſuppoſera donc, par exemple, que cette preſſion eſt réelle ; alors ſi en cherchant, d'après cette hypotheſe, la valeur de cette preſſion, on la trouve réelle & poſitive, on conclura que l'hypotheſe eſt légitime, & le réſultat exact ; ſinon on ſeroit aſſuré que la preſſion en queſtion eſt nulle, & qu'on peut par conſéquent traiter comme géométriques les mouvements qui le deviendroient en effet, ſi les deux corps dont il s'agit étoient librement perméables l'un à l'autre.

De même, s'il y avoit dans le ſyſtême une Machine, un fil par exemple, & qu'on ignorât ſi la tenſion de ce fil eſt nulle ou réelle, on pourroit faire le calcul, en ſuppoſant d'abord qu'il y a réellement tenſion ; alors, ſi l'on trouve pour la valeur de cette tenſion une quantité réelle & poſitive, on conclura que la ſuppoſition étoit légitime, & que le réſultat eſt exact ; ſinon il faudra recommencer le calcul, en partant de la ſuppoſition contraire, c'eſt-à-dire en ſuppoſant que la tenſion du fil ſoit égale à zero ; ce qui ſe fera, en ſuppoſant le fil anéanti, c'eſt-à-dire en traitant comme géométriques les mouvements qui le ſeroient effectivement, ſi le fil en queſtion n'exiſtoit pas.

Il ſuit delà que pour tirer dans chaque cas particulier de l'équation générale (F), toutes les équations déterminées qu'elle peut donner, il

faut, 1°. faire prendre au ſyſtême tous les mouvements géométriques dont il eſt ſuſceptible; 2°. traiter encore comme tels tous ceux qui le deviendroient, en ſupprimant quelque Machine ou partie de Machine, dont l'action ſur le reſte du ſyſtême ſoit nulle, ou en regardant comme perméables l'un à l'autre les corps entre leſquels, quoiqu'adjacents, il ne s'exerce aucune preſſion; 3°. enfin, ſi l'on eſt en doute que tel fil, verge ou partie quelconque de Machine ait ou non une action réelle ſur les autres parties du ſyſtême, ou qu'il y ait preſſion réelle entre deux corps adjacents, il faut éclaircir d'abord ce doute, en ſuppoſant la choſe en queſtion, comme on l'a expliqué ci-deſſus, & traitant comme géométriques les mouvements que ces ſuppoſitions auront fait découvrir pouvoir être pris pour tels.

D'après cette remarque, il paroît donc à propos d'étendre le nom de *géométriques* à tous les mouvements, qui ſans l'être effectivement, le deviennent, en ſupprimant quelque Machine ou partie de Machine qui n'influe en rien ſur l'état du ſyſtême, & en regardant auſſi comme parfaitement perméables l'un à l'autre les corps qui ſe touchent, ſans qu'il s'exerce entre eux aucune preſſion, c'eſt-à-dire ſans qu'il y ait autre choſe qu'une ſimple juxtapoſition: ainſi nous comprendrons dorénavant tous ces mouvements, ſous le nom commun de *mouvements géométriques*, puiſqu'en effet ils ſe déterminent également par des opérations purement géométriques, & s'emploient de même pour tirer de l'équation générale (F), des équations déterminées, attendu que la propriété générale &

excluſive (1) de ces mouvements, eſt de changer l'état du ſyſtême, ſans altérer l'action réciproque des corps qui le compoſent; cependant, pour laiſſer entre eux quelque diſtinction, on peut appeller les premiers, *mouvements géométriques abſolus*, & les autres, *mouvements géométriques par ſuppoſition*; mais lorſque je parlerai ſimplement de mouvements géométriques, ſans les déſigner autrement, on entendra indifféremment les uns & les autres.

Cela poſé, puiſque nous avons expliqué comment on peut déterminer, ſans le ſecours d'aucun principe méchanique, tous les mouvements géométriques dont un ſyſtême donné eſt ſuſceptible, il s'enſuit que le problême général que nous nous étions propoſé, ſe trouve entiérement réduit par l'équation générale (F), à des opérations purement géométriques & analytiques; il faut cependant obſerver qu'il ne ſuffit pas d'attribuer aux arbitraires u, différentes valeurs, mais qu'il faut auſſi leur attribuer différents rapports ou directions; car ſi l'on ſe contentoit de leur attribuer différentes valeurs,

(1) Il eſt évident que cette propriété appartient ſucceſſivement aux mouvements que j'appelle ici géométriques, & que ce ſeroit par conſéquent en avoir une idée très-fauſſe, que de les regarder comme des mouvements ſimplement poſſibles, c'eſt-à-dire compatibles avec l'impénétrabilité de la matiere: car, ſuppoſons par exemple que tout le ſyſtême ſe réduiſe à deux globes adjacents, & ſe pouſſant l'un l'autre; il eſt clair que ſi l'on force ces corps à ſe ſéparer, ou à ſe mouvoir en ſens contraire l'un de l'autre, ce mouvement ne ſera pas impoſſible, mais qu'en même temps les corps ne peuvent le prendre ſans ceſſer d'agir l'un ſur l'autre: ce mouvement n'eſt donc pas propre à remplir le but qu'on ſe propoſe, qui eſt de ne rien changer à l'action réciproque des corps.

ſans rien changer aux rapports ni aux directions, on obtiendroit différentes équations toutes juſtes à la vérité, mais qui ſe réduiroient évidemment à la même, en les multipliant par différentes conſtantes.

Remarque II.

XIX. Comme il n'eſt encore queſtion juſqu'ici que de corps durs, il eſt clair que parmi les différentes valeurs qu'on peut attribuer à u, la vîteſſe V eſt elle-même compriſe, c'eſt-à-dire que le mouvement réel du ſyſtême eſt lui-même un des mouvements géométriques dont il eſt ſuſceptible; la premiere équation (E) eſt donc contenue dans l'équation indéterminée (F), & par conſéquent on peut réduire à cette ſeule équation (F) toutes les loix de l'équilibre & du mouvement dans les corps durs.

Or, on vient de voir que cette équation n'eſt autre choſe que la premiere (E), à laquelle on eſt parvenu à donner plus d'extenſion, par le moyen des mouvements géométriques; mais, comme on le verra bientôt (XXIV), l'analogie de cette équation (E) avec le principe de la conſervation des forces vives dans le choc des corps parfaitement élaſtiques, devient frappante, par une légere transformation; & nous verrons (XXVI), qu'en effet ce n'eſt autre choſe que ce principe lui-même transféré aux corps durs, avec la modification qu'exige la différente nature de ces corps: c'eſt donc cette conſervation de forces vives, qui ſervira, comme nous en avions prévenu, de baſe à toute notre théorie des Machines, ſoit en repos, ſoit en mouvement.

D'après ces remarques, on va récapituler brié-

vement la ſolution du problême précédent, pour faire voir d'un coup d'œil la ſuite des opérations qu'on vient d'indiquer.

Problême.

XX. *Connoiſſant le mouvement virtuel d'un ſyſtême quelconque donné de corps durs (c'eſt-à-dire celui qu'il prendroit, ſi chacun des corps étoit libre) trouver le mouvement réel qu'il doit avoir l'inſtant ſuivant.*

Solution. Nommons

Chaque molécule du ſyſtême, m

Sa vîteſſe virtuelle donnée, W

Sa vîteſſe réelle cherchée, V

La vîteſſe qu'elle perd, de ſorte que W ſoit la réſultante de V & de cette vîteſſe, U

Imaginons maintenant qu'on faſſe prendre au ſyſtême un *mouvement géométrique* arbitraire, & ſoit la vîteſſe qu'aura alors m, u

L'angle formé par les directions de W & V, X

L'angle formé par les directions de W & U, Y

L'angle formé par les directions de V & U, Z

L'angle formé par les directions de W & u, x

L'angle formé par les directions de V & u, y

L'angle formé par les directions de U & u, z

Cela poſé, on aura l'équation $\int m\,u\,U\,\mathrm{cof}\,z = 0$ (F), par le moyen de laquelle on trouvera dans tous les cas l'état du ſyſtême, en attribuant ſucceſſivement aux indéterminées u, dif-

férents rapports & directions arbitraires.

Définitions.

XXI. Imaginons un ſyſtême de corps en mouvement d'une maniere quelconque : ſoient m la maſſe de chacun de ces corps, & V ſa vîteſſe ; ſuppoſons maintenant qu'on faſſe prendre au ſyſtême un mouvement quelconque géométrique, & ſoient u la vîteſſe qu'aura alors m (& que j'appellerai ſa *vîteſſe géométrique*) & y l'angle compris entre les directions de V & u ; cela poſé, la quantité $m\,u\,V\cos y$ ſera nommée moment de la quantité de mouvement mV, à l'égard de la vîteſſe géométrique u, & la ſomme de toutes ces quantités, c'eſt-à-dire $\int m\,u\,V\cos y$, ſera nommée moment de la quantité de mouvement du ſyſtême à l'égard du mouvement géométrique, qu'on lui a fait prendre : ainſi *le moment de la quantité de mouvement d'un ſyſtême de corps, à l'égard d'un mouvement quelconque géométrique, eſt la ſomme des produits des quantités de mouvement des corps qui le compoſent, multipliées chacune par la vîteſſe géométrique de ce corps, eſtimée dans le ſens de cette quantité de mouvement.* De ſorte qu'en conſervant les dénominations du problême, $\int m\,u\,W\cos x$ eſt le moment de la quantité de mouvement du ſyſtême avant le choc ; $\int m\,u\,V\cos y$ eſt le moment de la quantité de mouvement du même ſyſtême après le choc ; & $\int m\,u\,U\cos z$ eſt le moment de la quantité de mouvement perdu dans le choc : (tous ces moments étant rapportés au même mouvement géométrique). Ainſi de l'équation fondamentale (F) on peut conclure que *dans le choc des corps durs, ſoit que ces corps ſoient tous*

mobiles, ou qu'il y en ait de fixes, ou ce qui revient au même, ſoit que ce choc ſoit immédiat, ou qu'il ſe faſſe par le moyen d'une Machine quelconque ſans reſſort, le moment de la quantité de mouvement perdue par le ſyſtême général eſt égal à zero.

W étant la réſultante de V & U, il eſt clair qu'on à $W \cos x = \cos y + U \cos z$, ou $m u W \cos x = m u V \cos y + m u U \cos z$, ou enfin $\int m u W \cos x = \int m u V \cos y + \int m u U \cos z$; or, nous avons trouvé $\int m u U \cos z = 0$; donc $\int m u W \cos x = \int m u V \cos y$, c'eſt-à-dire qu'*à l'égard d'un mouvement quelconque géométrique, le moment de quantité de mouvement du ſyſtême, immédiatement après le choc, eſt égal au moment de quantité de mouvement immédiatement avant le choc.*

Lorſqu'on décompoſe la vîteſſe que prendroit un corps s'il étoit libre, en deux, dont l'une ſoit la vîteſſe qu'il prend réellement, l'autre eſt la vîteſſe qu'il perd; & réciproquement ſi l'on décompoſe la vîteſſe qu'il prend, en deux, dont l'une ſoit celle qu'il auroit priſe s'il eût été libre, l'autre fera la vîteſſe qu'il gagne : d'où il ſuit viſiblement que ce qu'on entend par la vîteſſe gagnée par un corps, & ce qu'on entend par ſa vîteſſe perdue, ſont deux quantités égales & directement oppoſées : cela poſé, le moment de la quantité de mouvement perdue par m, à l'égard de la vîteſſe géométrique u, étant, ſuivant la définition précédente $m u U \cos z$, le moment de la quantité de mouvement gagnée par le même corps ſera $- m u U \cos z$; car il n'y a de différence entre ces deux quantités, qu'en ce que l'angle compris entre u & la vîteſſe gagnée, eſt le ſupplément de celui compris entre u & U; de ſorte que l'un de ces angles étant

aigu, l'autre ſera obtus, & ſon coſinus égal au coſinus de l'autre, pris négativement.

Il ſuit delà que le moment de la quantité de mouvement perdue par le ſyſtême général, à l'égard d'un mouvement quelconque géométrique, (lequel eſt nul, comme on l'a vu ci-deſſus), eſt la même choſe que la différence entre le moment de quantité de mouvement perdue par une partie quelconque des corps qui le compoſent, & le moment de la quantité de mouvement gagnée par les autres corps du même ſyſtême; donc cette différence eſt égale à zero; donc l'une de ces deux quantités eſt égale à l'autre, c'eſt-à-dire que *le moment de quantité de mouvement perdue dans le choc par une partie quelconque des corps du ſyſtême, à l'égard d'un mouvement quelconque géométrique, eſt égal au moment de quantité de mouvement gagnée par les autres corps du même ſyſtême.*

On peut donc, de la définition précédente, recueillir les trois propoſitions contenues dans le théorême ſuivant.

Théorême.

XXII. *Dans le choc des corps durs, ſoit que ce choc ſoit immédiat, ou qu'il ſe faſſe par le moyen d'une Machine quelconque ſans reſſort, il eſt conſtant qu'à l'égard d'un mouvement quelconque géométrique:*

1°. *Le moment de la quantité de mouvement perdue par-tout le ſyſtême, eſt égal à zero.*

2°. *Le moment de la quantité de mouvement perdue par une partie quelconque des corps du ſyſtême, eſt égal au moment de la quantité de mouvement gagnée par l'autre partie.*

3°. *Le moment de la quantité de mouvement réelle du ſyſtême général, immédiatement après le choc, eſt égal au moment de la quantité de mouvement du même ſyſtême, immédiatement avant le choc.*

Il eſt clair, par la définition précédente, que ces trois propoſitions ſont identiques au fonds, & ne ſont autre choſe que l'équation même fondamentale (F) exprimée de diverſes manieres.

On peut remarquer auſſi que ces propoſitions ont beaucoup de rapport à celles que l'on tire de la conſidération des moments, relativement à différents axes; mais celles-ci ſont moins générales, & ſe tirent aiſément de celles qu'on vient d'établir (XVII).

Il y a donc, comme on voit, par la troiſieme propoſition de ce théorême; il y a, dis-je, dans toute percuſſion ou communication de mouvement, ſoit immédiate, ſoit faite par l'entremiſe d'une Machine, une quantité qui n'eſt point altérée par le choc: cette quantité n'eſt pas, comme l'avoit penſé *Deſcartes*, la ſomme des quantités de mouvement; ce n'eſt pas non-plus la ſomme des forces vives, car celle-ci ne ſe conſerve que dans le cas où le mouvement change par degrés inſenſibles, comme on verra plus bas, & elle diminue toujours lorſqu'il y a percuſſion, comme on le prouvera dans le corollaire ſecond: lorſque le ſyſtême eſt libre, la quantité de mouvement eſtimée dans un ſens quelconque, eſt à la vérité la même avant & après la percuſſion; mais cette conſervation n'a plus lieu, s'il y a des obſtacles, non-plus que celle des moments de quantité de mouvements rapportés à différents axes: toutes ces quantités

ſont donc altérées par le choc ; ou du moins ne ſe conſervent que dans quelques cas particuliers ; mais il y a une autre quantité que ni les divers obſtacles qui s'oppoſent au mouvement, ni les Machines qui le tranſmettent, ni l'intenſité des différentes percuſſions ne peuvent changer ; c'eſt le moment de quantité de mouvement du ſyſtême général, à l'égard de chacun des mouvements géométriques dont il eſt ſuſceptible, & ce principe renferme en lui ſeul toutes les loix de l'équilibre & du mouvement dans les corps durs ; nous verrons même dans le corollaire IV, que cette loi s'étend également aux autres eſpeces de corps, quelle qu'en ſoit la nature & le degré d'élaſticité.

Si le choc détruiſoit tous les mouvements, on auroit $V = 0$, ainſi l'équation ſe réduiroit à $\int m W u \cos x = 0$, qui nous apprend que ce cas arrive, c'eſt-à-dire que tous les mouvements ſe détruiſent réciproquement par le choc, dans le cas où immédiatement avant ce choc, le *moment de la quantité de mouvement* du ſyſtême général eſt nul relativement, à tous les mouvements géométriques dont il eſt ſuſceptible.

Corollaire I.

XXIII. *Parmi tous les mouvements dont eſt ſuſceptible un ſyſtême quelconque de corps durs agiſſants les uns ſur les autres, ſoit par un choc immédiat, ſoit par des Machines quelconques ſans reſſort, celui de ces mouvements qui aura lieu réellement, l'inſtant d'après, ſera le mouvement géométrique, qui eſt tel que la ſomme des produits de chacune des maſſes, par le carré de la vîteſſe qu'elle perdra, eſt un* minimum, *c'eſt-à-dire moindre que*

la ſomme des produits de chacun de ces corps, par la vîteſſe qu'il auroit perdue, ſi le ſyſtême eût pris un autre mouvement quelconque géométrique.

Sur quoi il faut remarquer qu'en donnant pour *minimum* la ſomme des produits de chaque maſſe, par le carré de ſa viteſſe perdue, j'entends ſeulement que la différentielle de cette ſomme eſt nulle, c'eſt-à-dire que ſa différence avec ce qu'elle ſeroit ſi le ſyſtême avoit un mouvement géométrique infiniment peu différent du premier, eſt égal à zero : ainſi cette ſomme peut être quelquefois un *maximum*, ou même n'être ni un *maximum* ni un *minimum*, & j'ai ſeulement à établir que $d\int m U^2 = 0$.

Démonſtration. Il eſt d'abord évident que le vrai mouvement du ſyſtême après le choc doit être géométrique, car les mouvements géométriques étant ceux qui n'alterent point l'action qui s'exerce entre les corps, il eſt clair que le premier en ordre eſt le mouvement même que prend le ſyſtême : il s'agit donc de ſavoir quel eſt, parmi tous les mouvements géométriques poſſibles, celui qui doit avoir lieu : or, ſuppoſons que s'il en prenoit un autre infiniment peu différent de celui qu'on cherche, la vîteſſe de chaque molécule m fût alors V' ; décompoſons V' en deux, dont l'une ſoit V ; c'eſt-à-dire la vîteſſe réelle, & l'autre V'', cela poſé, il eſt évident que ſi les corps n'avoient pas d'autres vîteſſes que ces dernieres V'', le mouvement ſeroit encore géométrique, car V'' eſt viſiblement la réſultante de V' & d'une vîteſſe égale & directement oppoſée à V ; or, par hypotheſe, les molécules priſes deux à deux ne tendent ni en vertu de V', ni en vertu de $-V$, à ſe rapprocher ou à s'éloigner, puiſque dans ces deux

tas le mouvement eſt géométrique ; donc, en ſuppoſant que les molécules m aient à la fois les vîteſſes V' & $-V$, ou leur réſultante V'', ils ne tendront non-plus ni à ſe rapprocher ni à s'éloigner ; & partant, le mouvement ſera alors géométrique : donc, ſi l'on appelle ζ'' l'angle compris entre les directions de V'' & U, on aura par l'équation fondamentale (F) $\int m U V'' \cos \zeta'' = 0$; d'un autre côté, nommons U' la vîteſſe que perdroit m ſi ſa vîteſſe effective étoit V', de ſorte que W ſoit la réſultante de V' & de U', il faudra néceſſairement que U' ſoit compoſée de U & d'une vîteſſe égale & directement oppoſée à V'' ; d'où il ſuit évidemment que $U' - U$ ou $dU = -V'' \cos \zeta''$; donc l'équation $\int m U V'' \cos \zeta'' = 0$, trouvée ci-deſſus, devient $\int m U dU = 0$ ou $d \int m U^2 = 0$.

Je ſuppoſe, par exemple, que deux globes A & B, venant à ſe choquer obliquement, on demande leurs mouvements après le choc.

Suppoſons que la vîteſſe de A, eſtimée ſuivant la ligne des centres, ſoit avant le choc a, & après le choc V ; que celle de B, auſſi eſtimée ſuivant la ligne des centres, ſoit avant le choc b, & après le choc u ; que celle de A, eſtimée perpendiculairement à la même ligne, ſoit avant le choc a', & après le choc V' ; qu'enfin celle de B, auſſi eſtimée perpendiculairement à cette ligne des centres, ſoit avant le choc b', & après le choc u' ; cela poſé, par notre propoſition, le mouvement devant être géométrique, il faut d'abord qu'on ait $V = u$, ainſi la vîteſſe perdue par A, ſuivant la ligne des centres, ſera $a - u$, & celle perdue par B, dans le même ſens, ſera $b - u$; de plus, dans le ſens perpendiculaire à la ligne des centres, la vîteſſe perdue par A

ſera $a' - V'$, & celle perdue par B, ſera $b' - u'$; donc $\sqrt{(a-u)^2 + (a'-V')^2}$ ſera la vîteſſe abſolue perdue par A, & celle perdue par B ſera $\sqrt{(b-u)^2 + (b'-u')^2}$; donc, ſuivant la propoſition, on doit avoir $d(A(a-u)^2 + A(a'-V')^2 + B(b-u)^2 + B(b'-u')^2) = 0$, ou $A(a-u)du + A(a'-V')dV' + B(b-u)du + B(b'-u')du' = 0$, équation qui doit avoir lieu généralement, c'eſt-à-dire, quelles que ſoient les valeurs de du, dV', & du'; il faut donc que le coefficient de chacune de ces différentielles ſoit égal à zero; ce qui donne $V' = a'$, $u' = b'$, & $u = \frac{Aa + Bb}{A + B}$; *ce qu'il falloit trouver.*

Il eſt clair que cette propoſition renferme toutes les loix du choc des corps durs, ſoit que ce choc ſoit immédiat, ou qu'il ſe faſſe par le moyen d'une Machine quelconque, puiſqu'il aſſigne le caractere auquel on reconnoîtra parmi tous les mouvements qui ſont poſſibles, celui qui doit avoir lieu réellement à chaque inſtant : ce principe a beaucoup d'analogie avec celui que *M. de Maupertuis* a trouvé & nommé *principe de la moindre action.* (*Eſſai de coſmologie*).

Corollaire II.

XXIV. *Dans le choc des corps durs, ſoit qu'il y en ait de fixes, ou qu'ils ſoient tous mobiles* (*ou ce qui revient au même*), *ſoit que ce choc ſoit immédiat, ou qu'il ſe faſſe par le moyen d'une Machine quelconque ſans reſſort ; la ſomme des forces vives avant le choc, eſt toujours égale à la ſomme des forces vives après le choc, plus*

la

la ſomme des forces vives qui auroit lieu ſi la vîteſſe qui reſte à chaque mobile, étoit égale à celle qu'il a perdue dans le choc.

C'eſt-à-dire qu'il faut prouver l'équation ſuivante $\int m W^2 = \int m V^2 + \int m U^2$; or, elle ſe déduit facilement de l'équation fondamentale (E), car W étant réſultante de V & U, il eſt clair que W V & U ſont proportionnelles aux trois côtés d'un certain triangle : donc, par la trigonométrie, on a $W^2 = V^2 + U^2 + {}_2 VU \cos Z$: donc, $\int m W^2 = \int m V^2 + \int m U^2 + {}_2 \int m VU \cos Z$: or, par l'équation (E) on a $\int m VU \cos Z = 0$; donc l'équation précédente ſe réduit à $\int m W^2 = \int m V^2 + \int m U^2$; *ce qu'il falloit prouver.*

On voit donc, comme nous l'avons dit (XXI), que par cette transformation l'analogie de l'équation (E) avec la conſervation des forces vives, devient frappante ; auſſi peut-on aiſément démontrer l'une par l'autre, comme on verra (XXVI).

L'analogie de cette même équation avec la conſervation des forces vives dans un ſyſtême de corps durs dont le mouvement change par degrés inſenſibles, eſt encore plus évidente, puiſqu'il s'agit alors d'un cas particulier de celui que nous venons d'examiner ; c'eſt en effet viſiblement le cas particulier ou U eſt infiniment petite, & partant U^2 infiniment petite du ſecond ordre ; ce qui réduit l'équation à $\int m W^2 = \int m V^2$; mais cette conſervation ſera expliquée plus au long dans le corollaire ſuivant.

Corollaire III.

XXV. *Lorſqu'un ſyſtême quelconque de corps durs change de mouvement par degrés inſenſibles ;*

ſi pour un inſtant quelconque on appelle m *la maſſe de chacun des corps*, V *ſa vîteſſe*, p *ſa force motrice*, R *l'angle compris entre les directions de* V & p, u *la viteſſe qu'auroit* m, *ſi on faiſoit prendre au ſyſtême un mouvement quelconque géométrique*, r *l'angle formé par* u & p, y *l'angle formé par* V & u, d t *l'élément du temps, on aura ces deux équations*

$\int m V p\,dt\,\cos R - \int m V\,dV = 0.$

$\int m u p\,dt\,\cos r - \int m u\,d(V\cos y) = 0.$

Démonſtration. Premiérement, $p\,dt\cos R$ eſt viſiblement la vîteſſe que la force motrice p auroit imprimée à m dans le ſens de V, ſi ce corps eût été libre; de plus, dV eſt la vîteſſe qu'il reçoit réellement dans le même ſens; donc $p\,dt\cos R - dV$ eſt la vîteſſe perdue par m dans le ſens de V, en vertu de l'action réciproque des corps : c'eſt donc cette quantité qu'il faut mettre pour $U\cos Z$ dans l'équation fondamentale (E), laquelle devient par cette ſubſtitution $\int m V p\,dt\cos R - \int m V\,dV = 0$, qui eſt la premiere des deux équations que nous avions à démontrer.

Secondement, $p\,dt\cos r$ eſt la vîteſſe que la force motrice p auroit imprimée à m dans le ſens de u, ſi ce corps eût été libre; de plus, $V\cos y$ étant la vîteſſe de m dans le ſens de u, $d(V\cos y)$ eſt la quantité dont cette vîteſſe eſtimée dans le même ſens augmente; donc $p\,dt\cos r - d(V\cos y)$ eſt la vîteſſe perdue par m dans le ſens de u, en vertu de l'action réciproque des corps : c'eſt donc cette quantité qu'il faut mettre pour $U\cos z$ dans la ſeconde équation (F), laquelle devient par cette ſubſtitution $\int m u p\,dt\cos r - \int m u\,d(V\cos y) = 0$, qui eſt la ſeconde des deux équations que nous avions à démontrer.

Ces équations ne ſont donc autre choſe que les équations fondamentales (E) & (F) appli-

quées au cas où le mouvement change par degrés inſenſibles ; & partant, elles renferment toutes les loix de ce mouvement : on peut remarquer de plus, que la premiere de ces deux équations n'eſt qu'un cas particulier de la ſeconde, par la même raiſon que l'équation (E) d'où elle eſt tirée, eſt contenue dans celle (F) d'où eſt tirée la ſeconde ; mais cette premiere équation $\int m\, V p\, dt \cos R - \int m\, V\, dV = 0$ mérite une attention particuliere ; parce qu'elle renferme le fameux principe de la conſervation des forces vives dans un ſyſtême de corps durs dont le mouvement change par degrés inſenſibles, comme on va l'expliquer.

Nommons d'abord ds l'élément de la courbe décrite par le corpuſcule m pendant dt ; cela poſé, nous aurons $V\, dt = ds$; & partant, l'équation précédente prend cette forme $\int m\, p\, ds \cos R - \int m\, V\, dV = 0$: maintenant ſuppoſons pour un inſtant que la courbe décrite par m ſoit une ligne inflexible, que m ſoit un grain mobile enfilé dans cette courbe, qu'il la parcourt librement, c'eſt-à-dire ſans être gêné par les réactions des autres parties du ſyſtême, qu'il éprouve à chaque point de cette courbe la même force motrice que celle dont il étoit animé dans le premier cas, & qu'enfin dans ce premier cas la vîteſſe initiale de m ſoit K, tandis que dans le ſecond elle ſera nulle au premier inſtant, & V' après un temps indéterminé t ; cela poſé, en intégrant l'équation précédente pour avoir l'état du ſyſtême au bout du temps t ; nous aurons pour le premier cas $\int' \int m\, p\, ds \cos R - \int' \int m\, V\, dV = 0$, $\int'$ déſignant le ſigne d'intégration relatif à la durée du mouvement, tandis que $\int$ eſt le ſigne d'intégration relatif à la figure

du ſyſtême ; or, $\int' \int m V d V = \int m V^2$: donc l'équation peut ſe mettre ſous cette forme $\int' \int m p ds \cos R - \int m V^2 + C = 0$; C étant une conſtante ajoutée pour compléter l'intégrale, pour la déterminer, on obſervera qu'au premier inſtant on a $V = K$ & $\int' \int m p ds \cos R = 0$; donc $C = \int m K^2$; donc $2 \int' \int m p ds \cos R - \int m V^2 + \int m K^2 = 0$; par les mêmes raiſons on a pour le ſecond cas $2 \int' \int m p ds \cos R - \int m V'^2 = 0$, ſans conſtante, parce qu'on ſuppoſe V' nulle au premier inſtant ; ôtant donc cette équation de la précédente, réduiſant, & tranſpoſant, on a $\int m V^2 = \int m K^2 + \int m V'^2$; c'eſt-à-dire que *dans un ſyſtême quelconque de corps durs, dont le mouvement change par degrés inſenſibles, la ſomme des forces vives au bout d'un temps quelconque, eſt égale à la ſomme des forces vives initiales, plus la ſomme des forces vives qui auroit lieu, ſi chaque mobile avoit pour viteſſe celle qu'il auroit acquiſe en parcourant librement la courbe qu'il a décrite, en ſuppoſant d'ailleurs qu'il eût été animé à chaque point de cette courbe, de la même force motrice qu'il y éprouve réellement, & que ſa viteſſe au premier inſtant eût été nulle.*

C'eſt cette propoſition qu'on appelle principe de la conſervation des forces vives, & d'où l'on peut conclure que,

Dans un ſyſtême de corps durs dont le mouvement change par degrés inſenſibles, & qui ne ſont animés d'aucune force motrice, la ſomme des forces vives eſt une quantité conſtante, c'eſt-à-dire la même pour tous les inſtants.

Car dans ce cas on a par hypotheſe $p = 0$, ce qui donne $V' = 0$, & partant $\int m V^2 =$

$\int m K^2$; équation qui se tire d'ailleurs immédiatement de celle $\int m p V dt \cos R - \int m V dV = 0$ trouvée (XXIV), laquelle à cause de $p = 0$, se réduit à $\int m V dV = 0$, dont l'intégrale complétée est $\frac{1}{2} \int m V^2 - \frac{1}{2} \int m K^2 = 0$; d'où suit l'équation $\int m V^2 = \int m K^2$: qu'il falloit prouver.

Corollaire IV.

XXVI. J'ai prouvé (XIX), que l'équation indéterminée (F) renferme toutes les loix de l'équilibre & du mouvement dans les corps durs ; je vais maintenant plus loin, & je dis que cette équation convient également aux corps qui ne le sont pas, & que par conséquent cette loi générale s'étend indistinctement à tous les corps de la nature : en effet, lorsque plusieurs corps qui ne sont pas durs agissent les uns sur les autres d'une maniere quelconque, si l'on conçoit le mouvement qu'auroit pris chaque mobile s'il eût été libre, décomposé en deux, dont l'un soit celui qu'il prendra réellement, l'autre sera détruit ; d'où il suit visiblement que si les corps eussent été durs & n'eussent eu d'autres mouvements que ce dernier, il y auroit eu équilibre : ces mouvements détruits sont donc assujettis aux mêmes loix, ont entre eux les mêmes rapports, & peuvent enfin se déterminer de la même maniere que si les corps étoient durs, c'est-à-dire par l'équation générale (F) ; cette équation (F) n'est donc point bornée aux corps durs, elle appartient également à tous les corps de la nature, & contient par conséquent toutes les loix de l'équilibre & du mouvement, non-seulement pour les pre-

miers, mais même pour tous les autres, quel que puiſſe être leur degré de compreſſibilité ; mais la différence conſiſte en ce que l'on peut, dans le cas où il s'agit de corps durs, ſuppoſer $u = V$; de ſorte qu'alors $\int m\, V\, U$ cof $Z = o$, devient une des équations déterminées du problême, au lieu que cela n'eſt pas lorſque les corps ſont d'une nature différente : c'eſt donc cette équation déterminée, laquelle eſt la même que la premiere équation fondamentale (E), c'eſt dis-je cette équation déterminée qui caractériſe les corps durs, & par conſéquent il eſt abſolument néceſſaire de l'employer au moins implicitement dans toutes les queſtions qui concernent ces corps ; & lorſqu'il s'agit de corps d'une autre eſpece, il faut, outre les équations déterminées, qu'on peut obtenir en attribuant à u dans l'équation indéterminée, (F) différentes valeurs connues, il faut, dis-je en tirer encore une qui ſoit analogue à l'équation (E), & qui exprime en quelque ſorte la nature de ces corps, de même que celle-ci (E) exprime celle des corps durs ; mais comme cette recherche n'a qu'un rapport fort indirect aux Machines proprement dites, nous nous bornerons ici à examiner le cas où le degré d'élaſticité eſt le même pour tous les corps, c'eſt-à-dire que nous ſuppoſerons qu'en vertu de l'élaſticité, les corps exercent les uns ſur les autres des preſſions n fois auſſi grandes que ſi les corps étoient durs, n étant la même pour tous les corps du ſyſtême ; nous ſuppoſerons de plus que la preſſion & la reſtitution ſe faſſent dans un inſtant indiviſible, quoiqu'en rigueur cela ſoit impoſſible. Cela poſé ;

Les preſſions réciproques F devenant nF, auront entre elles les mêmes rapports que ſi les

corps étoient durs ; donc leurs réſultantes mU n'auront point changé de directions, mais ſeront ſeulement devenues n fois auſſi grandes qu'elles auroient été ſi les corps avoient été durs ; cela poſé, puiſque W eſt la réſultante de V & U, on a $V \cos Z = W \cos Y - U$; ainſi l'équation (E) à laquelle nous cherchons une analogue, peut ſe mettre ſous cette forme $\int m W U \cos Y - \int m U^2 = 0$; or, ſuivant ce qu'on vient de dire, il faut, pour appliquer cette équation au cas dont il s'agit ici, mettre $\frac{U}{n}$ au lieu de U, ſans rien changer à Y ; donc pour le cas que nous examinons, l'équation ſera $\int m W \frac{U}{n} \cos Y - \int \frac{m U^2}{n^2} = 0$: ou en multipliant par n^2, $n \int m W U \cos Y - \int m U^2 = 0$, ou à cauſe de $W \cos Y = V \cos Z + U$ on aura $\frac{n}{1-n} \int m V U \cos Z = \int m U^2$; ainſi cette équation ſera pour les corps dont il s'agit ce qu'eſt l'équation (E) pour les corps durs, & celle-ci même en eſt le cas particulier où l'on a $n = 1$, comme il eſt évident.

Lorſque $n = 2$ c'eſt le cas des corps parfaitement élaſtiques, & l'équation devient $2 \int m V U \cos Z + \int m U^2 = 0$; mais cette équation relative aux corps parfaitement élaſtiques, peut s'exprimer d'une maniere connue & plus ſimple, comme il ſuit : puiſque W eſt la réſultante de V & U, on a par la trigonométrie $W^2 = V^2 + U^2 + 2 V U \cos Z$; & partant $\int m W^2 = \int m V^2 + \int m U^2 + 2 \int m V U \cos Z$; ajoutant à cette équation celle trouvée ci-deſſus, & réduiſant, on a $\int m W^2 = \int m V^2$, qui eſt pré-

ciſément le principe de la conſervation des forces vives, c'eſt-à-dire que cette conſervation eſt pour les corps parfaitement élaſtiques, ce qu'eſt l'équation (E) pour les corps durs, comme nous avions promis de le prouver.

Remarque I.

XXVII. Je ne m'arrêterai point aux conſéquences particulieres que je pourrois tirer de la ſolution du problême précédent; je remarquerai ſeulement que les vîteſſes W, V, U, étant toujours proportionnelles aux trois côtés d'un triangle, la trigonométrie peut fournir les moyens de donner un grand nombre de formes différentes aux équations fondamentales (E) & (F), & je me contenterai d'en indiquer une qui eſt remarquable, à cauſe de la méthode imaginée par les Géometres, de rapporter les mouvements à trois plans perpendiculaires entre eux; ce qui donne aux ſolutions beaucoup d'élégance & de ſimplicité.

Imaginons donc à volonté trois axes perpendiculaires entre eux; & concevons que les vîteſſes W, V, U & u, ſoient décompoſées chacune en trois autres paralleles à ces axes. Cela poſé. Nommons

Celles qui répondent à W, W', W'', W'''.
Celles qui répondent à V, V', V'', V'''.
Celles qui répondent à U, U', U'', U'''.
Celles qui répondent à u, u', u'', u'''.

Maintenant, pour peu qu'on y faſſe attention, on verra aiſément que la premiere équation fondamentale (E) peut ſe mettre ſous cette forme $\int m V' U' + \int m V'' U'' + \int m V''' U''' = 0$, & la ſeconde (F) ſous celle-ci $\int m u' U'$

$+ \int m u'' U'' + \int m u''' U''' = o$, parce qu'en général toute quantité qui eſt le produit de deux vîteſſes A & B, par le coſinus de l'angle compris entre elles, eſt égale à la ſomme de trois autres produits $A' B' + A'' B'' + A''' B'''$; A', A'', A''', étant la vîteſſe A eſtimée de ces trois axes, & $B' B'' B'''$ étant la vîteſſe B eſtimée dans le ſens de ces mêmes axes; c'eſt-à-dire A' étant la vîteſſe A, & B' la vîteſſe B, eſtimées parallelement au premier de ces axes; A'' & B'' les mêmes vîteſſes A & B eſtimées parallelement au ſecond axe; A''' & B''' les mêmes vîteſſes eſtimées parallelement au troiſieme axe: ce qui ſe prouve aiſément par les éléments de géométrie.

Dans le cas d'équilibre, la premiere de ces équations transformées ſe réduit à $o = o$, & la ſeconde, à cauſe que dans ce cas $W = U$ devient $\int m u' W' + \int m u'' W'' + \int m u''' W''' = o$, laquelle exprime toutes les conditions de l'équilibre.

Lorſque le mouvement change par degrés inſenſibles, nous avons trouvé (XXV) que les équations fondamentales deviennent $\int m V p \, dt \cos R - \int m V dV = o$, & $\int m u p \, dt \cos r - \int m u d (V \cos y) = o$; donc en décompoſant p en trois autres forces paralleles aux trois axes, ſi ces forces compoſantes ſont déſignées par p', p'', p''', les équations précédentes deviendront, la premiere, $\int m V' p' dt + \int m V'' p'' dt + \int m V''' p''' dt = \int m V' dV' + \int m V'' dV'' + \int m V''' dV'''$, & la ſeconde, $\int m u' p' dt + \int m u'' p'' dt + \int m u''' p''' dt = \int m u' dV' + \int m u'' dV'' + \int m u'' dV'''$; enfin, dans le cas d'équilibre, la premiere s'évanouira, & la ſeconde ſe réduira à $\int m u' p' + \int m u'' p'' + \int m u''' p''' = o$.

Remarque II.

XXVIII. Juſqu'ici j'ai regardé les fils, verges, leviers, *&c.* comme des corps faiſant eux-mêmes partie du ſyſtême. Et cette hypotheſe eſt entiérement conforme à la nature ; mais une choſe qu'il eſt indiſpenſablement néceſſaire d'obſerver, c'eſt qu'a parler ſtrictement, il n'y a probablement dans l'univers aucun point abſolument fixe, aucun obſtacle abſolument immobile ; l'hypomochlion d'un levier ne paroît tel, que parce qu'il eſt appuyé ſur la terre qui n'eſt point fixe elle-même, mais dont la maſſe eſt preſque infiniment grande en comparaiſon de celles dont on conſidere ordinairement dans les Machines l'action & la réaction les unes ſur les autres : pour déplacer l'hypomochlion d'un levier, il faut donc auſſi mettre en mouvement le globe de la terre ; & il y eſt en effet, quelque foibles que ſoient les puiſſances qui agiſſent ſur la Machine ; la quantité de mouvement qu'elles lui procurent, eſt égale à la réſiſtence de l'hypomochlion ; mais cette quantité finie de mouvement, ſe diſtribuant dans une maſſe preſque infiniment grande, il en réſulte à cette maſſe une vîteſſe preſque infiniment petite, & voilà pourquoi ce mouvement n'eſt pas ſenſible, & peut ſe négliger dans la pratique.

Il ſuit de-là que ce qu'on appelle obſtacles immobiles en méchanique, ne ſont autre choſe que des corps dont la maſſe eſt ſi conſidérable, & par conſéquent la vîteſſe ſi petite, que leur mouvement ne peut être obſervé : ce ſera donc ſe rapprocher de la nature, que de conſidérer les obſtacles ou points fixes, comme des corps mobiles auſſi bien que tous les autres, mais d'une

maſſe infiniment grande, ou ce qui revient au même, comme des corps d'une denſité infinie, & qui ne différent qu'en ce point de tous les autres corps du ſyſtême. Il réſultera de-là un avantage conſidérable, c'eſt qu'on pourra faire prendre au ſyſtême où entreront ces corps, des mouvements quelconques géométriques; car dès qu'on ſuppoſera ces obſtacles mobiles comme tous les autres corps, ils deviendront ſuſceptibles de prendre des mouvements quelconques; & le ſyſtême général devra être regardé comme un aſſemblage de corps parfaitement mobiles: en conſéquence, les quantités de mouvement, abſorbées par les obſtacles, pourront s'évaluer comme pour toutes les autres parties du ſyſtême; de ſorte que ſi l'on appelle R la réſiſtance d'un point fixe donné, cette quantité R ſera dans l'équation (F) pour le point en queſtion, ce qu'eſt mU pour le corps m: on trouvera donc par cette équation cette même quantité R comme toutes les autres forces mU, ce qui n'auroit pu ſe faire en conſidérant les obſtacles comme abſolument immobiles, ſans avoir recours à quelque nouveau principe méchanique, qu'il auroit fallu faire concourir avec l'équation générale (F) pour parvenir à la ſolution complete de chaque problême particulier: ainſi cette maniere de conſidérer les points fixes, eſt non-ſeulement la plus conforme à la nature, comme nous l'avons dit ci-deſſus, mais encore la plus ſimple & la plus facile.

Quant aux fils, verges ou autres portions quelconques du ſyſtême dont les maſſes pourront être ſuppoſées infiniment petites, on pourra les négliger, c'eſt-à-dire, ſuppoſer chacune de leurs molécules m égale à zéro, ou ce qui revient au

même, regarder leur denſité comme infiniment petite ou nulle; notre équation (F) deviendra donc ainſi indépendante de ces quantités, c'eſt-à-dire la même que ſi l'on eût fait abſtraction de la maſſe de ces corps; & c'eſt ainſi qu'on trouvera aiſément la théorie mathématique de chaque Machine, c'eſt-à-dire en faiſant les abſtractions dont on a parlé (VIII).

XXIX. De cette remarque, il réſulte que quoiqu'il n'y ait qu'une ſeule eſpece de corps dans la nature, on les diſtingue cependant, pour la facilité des calculs, en trois claſſes différentes, qui ſont, 1°. ceux qu'on conſidere tels qu'ils ſont en effet & que la nature nous les offre, c'eſt-à-dire qui ſont d'une denſité finie; 2°. ceux auxquels on attribue une denſité infiniment grande, & qui par cette raiſon, doivent être regardés comme ſenſiblement fixes & immobiles; 3°. ceux auxquels on attribue une denſité infiniment petite ou nulle, & qui par conſéquent n'oppoſent par leur inertie aucune réſiſtance à leur changement d'état: on regarde ordinairement comme tels dans la pratique, les fils, verges, leviers & généralement tous les corps qui n'influent pas ſenſiblement par leur propre maſſe, aux changements qui arrivent dans le ſyſtême, mais qui ſont ſeulement regardés comme des moyens de communication entre les différents agents qui le compoſent.

Remarque III.

XXX. Après avoir traité de l'équilibre & du mouvement en général, autant que mon objet principal pouvoit le permettre, je vais paſſer à ce qui regarde plus particuliérement ce qu'on

entend communément par Machines ; car quoique la théorie de toute eſpece d'équilibre & de mouvement rentre toujours dans les principes précédents, puiſqu'il n'y a, ſuivant la premiere loi, que des corps qui puiſſent détruire ou modifier le mouvement des autres corps ; cependant il y a des cas où l'on fait abſtraction de la maſſe de ces corps, pour ne conſidérer que l'effort qu'ils font : par exemple, lorſqu'un homme tire un corps par un fil, ou le pouſſe par une verge, on n'introduit point dans le calcul la maſſe de cet homme, ni même l'effort dont il eſt capable, mais ſeulement celui qu'il exerce en effet ſur le point auquel il eſt appliqué ; c'eſt-à-dire la tenſion du fil, ſi c'eſt en tirant qu'il agit, ou la preſſion, ſi c'eſt en pouſſant ; & ſans conſidérer ſi c'eſt un homme ou un animal, un poids, un reſſort, une réſiſtance occaſionnée par un obſtacle ou par la force d'inertie d'un mobile (1), un frottement, une impulſion cauſée par le vent ou par un courant, *&c.* On donne en général le nom de puiſſance à l'effort exercé par l'agent, c'eſt-à-dire à cette preſſion ou tenſion par la-

(1) Un corps qu'on force à changer ſon état de repos ou de mouvement, réſiſte (XI) à l'agent qui prodnit le changement ; & c'eſt cette réſiſtance qu'on appelle force d'inertie : pour évaluer cette force, il faut donc décompoſer le mouvement actuel du corps en deux, dont l'un ſoit celui qu'il aura l'inſtant d'après ; car l'autre ſera évidemment celui qu'il faudra détruire, pour forcer le cops à ſon changement d'état ; c'eſt-à-dire la réſiſtance qu'il oppoſe à ce changement ou ſa force d'inertie, d'où il eſt aiſé de conclure, que *la force d'inertie d'un corps, eſt la réſultante de ſon mouvement actuel, & d'un mouvement égal & directement oppoſé à celui qu'il doit avoir l'inſtant ſuivant.*

quelle il agit ſur le corps auquel il eſt appliqué ; & l'on compare ces différents efforts ſans égard aux agents qui les produiſent, parce que la nature des agents ne peut rien changer aux forces qu'ils ſont obligés d'exercer pour remplir les différents objets auxquels ſont deſtinées les Machines : la Machine elle-même, c'eſt-à-dire le ſyſtême des points fixes, obſtacles, verges, leviers & autres corps intermédiaires qui ſervent à tranſmettre ces différents efforts d'un agent à l'autre ; la Machine, dis-je, elle-même eſt conſidérée comme un corps dépouillé d'inertie ; ſa propre maſſe, lorſqu'il eſt néceſſaire d'y avoir égard, ſoit à cauſe du mouvement qu'elle abſorbe, ſoit à cauſe de ſa peſanteur ou des autres forces motrices dont elle peut être animée, eſt regardée comme une puiſſance étrangere appliquée au ſyſtême ; en un mot, une Machine proprement dite, eſt un aſſemblage d'obſtacles immatériels, & de mobiles incapables de réaction, ou privés d'inertie, c'eſt-à-dire (XXIX) un ſyſtême de corps dont les denſités ſont infinies ou nulles : à ce ſyſtême, on imagine que différents agents extérieurs, au nombre deſquels on comprend la maſſe même de la Machine, ſont appliqués, & ſe tranſmettent leur action réciproque par l'entremiſe de cette Machine : c'eſt la preſſion ou autre effort exercé par chaque agent ſur ce corps intermédiaire, qu'on appelle force ou puiſſance, & c'eſt la relation qui exiſte entre ces différentes forces, dont la recherche eſt l'objet de la théorie des Machines proprement dites. Or, c'eſt ſous ce point de vue, que nous allons maintenant traiter de l'équilibre & du mouvement ; mais une force priſe dans ce ſens, n'en eſt pas moins une quantité de mouvement perdue par l'agent

qui l'exerce, quel que puiſſe être d'ailleurs cet agent ; qu'il agiſſe ſur la Machine en la tirant par un cordon, ou en la pouſſant par une verge, la tenſion de ce cordon, ou la preſſion de cette verge, exprime également & l'effort qu'il exerce ſur la Machine, & la quantité de mouvement qu'il perd lui-même par la réaction qu'il éprouve : ſi donc on appelle F cette force, cette quantité F ſera la même choſe que celle qui eſt exprimée par $m\,U$ dans nos équations (1) ; donc ſi l'on appelle auſſi Z, l'angle compris entre cette force F & la vîteſſe u, qu'auroit le point où on la ſuppoſe appliquée, ſi l'on faiſoit prendre au ſyſtême un mouvement quelconque géométrique, l'équation générale (F) deviendra $\int F u \cos Z = 0$ (AA). C'eſt donc ſous cette forme que nous emploierons déſormais cette équation, au moyen de quoi on pourra appliquer ce que nous dirons, à quelle eſpece de force on voudra imaginer ; & les principes expoſés dans cette premiere partie, nous ſerviront à développer les pro-

---

(1) Il eſt évident que la quantité de mouvement perdue $m\,U$, eſt la réſultante du mouvement qu'auroit eu l'inſtant d'après le corps m, s'il eût été libre, & du mouvement égal & directement oppoſé à celui qu'il prendra réellement ; or, le premier de ces deux mouvements, eſt lui-même la réſultante du mouvement actuel de m, & de ſa force motrice abſolue ; donc $m\,U$ eſt la réſultante de trois forces qui ſont : ſa force motrice abſolue, ſa quantité actuelle de mouvement, & la quantité de mouvement égale & directement oppoſée à celle qu'il doit avoir l'inſtant d'après ; mais ſuivant la note précédente, ces deux dernieres quantités de mouvement ont pour réſultante la force d'inertie ; donc $m\,U$ ou F eſt la réſultante de la force motrice de m & de ſa force d'inertie ; c'eſt-à-dire que *la force exercée par un corps quelconque, à chaque inſtant eſt la réſultante de ſa force motrice abſolue, & de ſa force d'inertie.*

priétés générales des Machines proprement dites, qui ſont l'objet de la ſeconde.

SECONDE PARTIE.

Des Machines proprement dites.

DÉFINITIONS.

XXXI. PARMI les forces appliquées à une Machine en mouvement, les unes ſont telles, que chacune d'entr'elles fait un angle aigu avec la vîteſſe du point où elle eſt appliquée; tandis que les autres forment des angles obtus avec les leurs : cela poſé, j'appellerai les premieres *forces mouvantes* ou *ſollicitantes*; & les autres, *forces réſiſtantes*: par exemple, ſi un homme fait monter un poids par le moyen d'un levier, d'une poulie, d'une vis, *&c.* il eſt clair que la peſanteur & la vîteſſe du poids forment néceſſairement, par leur concours, un angle obtus; autrement il eſt viſible que le poids deſcendroit au lieu de monter; mais la puiſſance motrice & ſa vîteſſe forment un angle aigu; ainſi, ſuivant notre définition, le poids ſera la *force réſiſtante*, & la *force* de l'homme ſera *ſollicitante*: il eſt viſible en effet, que celle-ci tend à favoriſer le mouvement actuel de la Machine, tandis que l'autre s'y oppoſe.

On obſervera que les forces ſollicitantes peuvent être dirigées dans le ſens même de leurs vîteſſes, puiſqu'alors l'angle formé par leurs concours eſt nul, & par conſéquent aigu; & que les forces réſiſtantes peuvent agir dans le ſens

ſens directement oppoſé à celui de leurs viteſſes ; puiſqu'alors l'angle formé par leurs concours, eſt de 180°, & par conſéquent obtus.

Il eſt à remarquer encore, que telle force qui eſt ſollicitante, pourroit devenir réſiſtante, ſi le mouvement venoit à changer ; que telle force qui eſt réſiſtante à un certain inſtant, peut devenir ſollicitante à un autre inſtant, & qu'enfin pour en juger à chaque inſtant, il faut conſidérer l'angle qu'elle fait avec la viteſſe du point où on la ſuppoſe appliquée ; ſi cet angle eſt aigu, la force ſera ſollicitante ; & s'il eſt obtus, elle ſera réſiſtante, juſqu'à ce que l'angle en queſtion vienne à changer. On voit par-là, que ſi on fait prendre un mouvement géométrique à un ſyſtême quelconque de puiſſances, chacune d'elles ſera *ſollicitante* ou *réſiſtante* à l'égard de ce mouvement géométrique, ſuivant que l'angle formé par cette force, & ſa viteſſe géométrique ſera aigu ou obtus.

XXXII. Si une force P ſe meut avec la viteſſe u, & que l'angle formé par le concours de u & P ſoit ζ, la quantité $P \cos \zeta u dt$ dans laquelle dt exprime l'élément du temps, ſera nommée *moment d'activité*, conſommé par la force P pendant dt ; c'eſt-à-dire que le *moment d'activité*, conſommé par une force P, dans un temps infiniment court, eſt le produit de cette force eſtimée dans le ſens de ſa viteſſe, par le chemin que décrit dans ce temps infiniment court, le point où elle eſt appliquée.

J'appellerai *moment d'activité*, conſommé par cette force, dans un temps donné, la ſomme des *moments d'activité*, conſommés par elle à chaque inſtant, de ſorte que $\int P \cos \zeta u dt$ eſt le *moment d'activité*, conſommé dans un temps

indéterminé par elle ; par exemple, ſi P eſt un poids, le *moment d'activité*, conſommé dans un temps indéterminé t, ſera $P \int u dt$ cof ζ ; ſuppoſons donc qu'après le temps t, le poids P ſoit deſcendu de la quantité H, on aura évidemment $d H = u dt$ cof ζ ; donc le *moment d'activité*, conſommé pendant dt ſera $P \int dH = PH$.

XXXIII. Lorſqu'il s'agira d'un ſyſtême de forces appliquées à une Machine en mouvement, j'appellerai *moment d'activité*, conſommé par toutes les forces du ſyſtême, la ſomme des *moments d'activité*, conſommés en même temps par chacune des forces qui le compoſent ; ainſi le *moment d'activité*, conſommé par les forces ſollicitantes, ſera la ſomme des *moments d'activité*, conſommés en même temps par chacune d'elles, & le moment d'activité, conſommé par les forces réſiſtantes, ſera la ſomme des *moments d'activité*, conſommés par chacune de ces forces : & comme chaque force réſiſtante fait un angle obtus avec la direction de ſa vîteſſe ; le coſinus de cet angle eſt négatif ; le *moment d'activité*, conſommé par les forces réſiſtantes, eſt donc auſſi une quantité négative ; & partant, *le moment d'activité*, conſommé par toutes les forces du ſyſtême, eſt la même choſe que la différence entre le *moment d'activité*, conſommé par les forces ſollicitantes, & le *moment d'activité*, conſommé en même temps par les forces réſiſtantes, conſidéré comme une quantité poſitive.

Une force eſtimée dans un ſens directement oppoſé à celui de ſa vîteſſe, & multipliée par le chemin que décrit dans un temps infiniment court, le point où elle eſt appliquée, s'appellera *moment d'activité produit* par cette force dans

ce temps infiniment court : de ſorte que le *moment d'activité, conſommé*, & le *moment d'activité, produit*, ſont deux quantités égales, mais de ſignes contraires ; & qu'il y a entr'elles une différence analogue à celle qu'on trouve (XXI) entre les *moments de quantité de mouvement, gagnées & perdues*, par un corps, à l'égard d'un mouvement géométrique.

Je donnerai auſſi le nom de *moment d'activité, exercé* par une force, à ce que j'ai appellé ſon *moment d'activité, conſommé*, ſi elle eſt ſollicitante, & à ce que j'ai appellé ſon *moment d'activité, produit*, ſi elle eſt réſiſtante ; ainſi le *moment d'activité, exercé* par une force quelconque, dans un temps infiniment court, eſt en général le produit de cette force, par le chemin qu'elle décrit dans ce temps infiniment court, & par le coſinus du plus petit des deux angles formés par les directions de cette force & de ſa vîteſſe ; d'où il ſuit évidemment que ce *moment d'activité, exercé*, eſt toujours une quantité poſitive.

On fera, à l'égard des quantités que nous venons d'appeller *moments d'activité, produits*, & *moments d'activité, exercés*, les mêmes remarques ſemblables à celles que nous avons faites ci-deſſus, au ſujet du *moment d'activité, conſommé* par une puiſſance ou un ſyſtême de puiſſances, dans un temps donné.

Ces définitions admiſes, je paſſe au principe général de l'équilibre & du mouvement dans les Machines proprement dites, & dont la recherche a été le principal objet de cet Eſſai.

THÉORÊME FONDAMENTAL.

Principe général de l'équilibre & du mouvement dans les Machines.

XXXIV. *Quel que ſoit l'état de repos ou de mouvement où ſe trouve un ſyſtême quelconque de forces appliquées à une Machine, ſi on lui fait prendre tout-à-coup un mouvement quelconque géométrique, ſans rien changer à ces forces, la ſomme des produits de chacune d'elles, par la viteſſe qu'aura dans le premier inſtant le point où elle eſt appliquée, eſtimée dans le ſens de cette force, ſera égale à zéro.*

C'eſt-à-dire donc qu'en nommant *F* chacune de ces forces (1), *u* la viteſſe qu'aura au pre-

(1) Il ne ſera peut-être pas inutile de prévenir une objection qui pourroit ſe préſenter à l'eſprit de ceux qui n'auroient pas fait attention à ce qui a été dit (XXX) ſur le vrai ſens qu'on doit attacher au mot *force :* imaginons, par exemple, dira-t-on, un treuil à la roue & au cylindre duquel ſoient ſuſpendus des poids par des cordes; s'il y a équilibre, ou que le mouvement ſoit uniforme, le poids attaché à la roue, ſera à celui du cylindre, comme le rayon du cylindre eſt au rayon de la roue; ce qui eſt conforme à la propoſition. Mais il n'en eſt pas de même lorſque la Machine prend un mouvement accéléré ou retardé; il paroît donc qu'alors les forces ne ſont pas en raiſon réciproque de leurs viteſſes eſtimées dans le ſens de ces forces, comme il ſuivroit de la propoſition. La réponſe à cela, eſt que dans le cas où ce mouvement n'eſt pas uniforme, les poids en queſtion ne ſont pas les ſeules forces exercées dans le ſyſtême, car le mouvement de chaque corps, changeant continuellement, il oppoſe auſſi à chaque inſtant, par ſon inertie, une réſiſtance à ce changement d'état; il faut

mier inſtant le point où elle eſt appliquée, ſi l'on fait prendre à la Machine un mouvement géométrique, & ζ l'angle compris entre les directions de F & de u, il faut prouver qu'on aura pour tout le ſyſtême $\int Fu \cos \zeta = 0$. Or, cette équation eſt préciſément l'équation (AA) trouvée (XXX) laquelle n'eſt autre choſe au fond que l'équation même fondamentale (F), préſentée ſous une autre forme.

Il eſt aiſé d'appercevoir que ce principe général n'eſt, à proprement parler, que celui de *Deſcartes*, auquel on donne une extenſion ſuffiſante, pour qu'il renferme non-ſeulement toutes les conditions de l'équilibre entre deux forces, mais encore toutes celles de l'équilibre & du mouvement, dans un ſyſtême compoſé d'un nombre

---

donc auſſi tenir compte de cette réſiſtance. Nous avons déjà dit (XXX. *V.* la note), comment cette force doit s'évaluer, & nous verrons plus bas (XLI), comment on doit la faire entrer dans le calcul. En attendant, il ſuffit de remarquer que les forces appliquées à la Machine dont il eſt ici queſtion, ne ſont pas les poids même, mais les quantités de mouvement perdues par ces poids (XXX), leſquelles doivent s'eſtimer par les tenſions des cordons auxquels ils ſont ſuſpendus: or, que la Machine ſoit en repos ou en mouvement, que ce mouvement ſoit uniforme ou non, la tenſion du cordon attaché à la roue, eſt à celle du cordon attaché au cylindre, comme le rayon du cylindre eſt au rayon de la roue, c'eſt-à-dire que ces tenſions ſont toujours en raiſon réciproque des viteſſes des poids qu'ils ſoutiennent; ce qui eſt d'accord avec la propoſition. Mais ces tenſions ne ſont pas égales aux poids; elles ſont (XXX. *V.* la note) les réſultantes de ces poids & de leurs forces d'inertie, leſquelles ſont elles-même (XXX. *V.* la note) les réſultantes des mouvements actuels de ces corps, & des mouvements égaux & directement oppoſés à ceux qu'ils prendront réellement l'inſtant d'après.

quelconque de puiſſances : auſſi la premiere conſéquence de ce théorême, ſera ce principe de *Deſcartes*, rendu complet par les conditions que nous avons vu lui manquer (V).

Corollaire I.

Principe général de l'équilibre entre deux puiſſances.

XXXV. *Lorſque deux agents quelconques, appliqués à une Machine, ſe font mutuellement équilibre ; ſi on fait prendre à cette Machine un mouvement géométrique, arbitraire ; 1°. les forces exercées par les agents, ſeront en raiſon réciproque de leurs vîteſſes eſtimées dans le ſens de ces forces ; 2°. l'une de ces puiſſances ſera un angle aigu avec la direction de ſa vîteſſe, & l'autre, un angle obtus avec la ſienne.*

Car ſi les forces exercées par les agents, ſont nommées F & F', leurs vîteſſes u & u', les angles formés par ces puiſſances & leurs vîteſſes z & z', on aura par le théorême précédent, $Fu \operatorname{cof} z + F'u' \operatorname{cof} z' = 0$; donc $F : F' :: -u' \operatorname{cof} z' : u \operatorname{cof} z$, qui eſt la proportion énoncée par la premiere partie de ce corollaire, & par laquelle on voit en même temps que le rapport de $\operatorname{cof} z$ à $\operatorname{cof} z'$, eſt négatif ; d'où il ſuit que l'un de ces angles eſt néceſſairement aigu, & l'autre obtus.

Corollaire II.

Principe général d'équilibre dans les Machines à poids.

XXXVI. *Lorſque pluſieurs poids appliqués à une Machine quelconque, ſe font mutuellement équilibre, ſi l'on fait prendre à cette Machine un mouvement quelconque géométrique, la vîteſſe du centre de gravité du ſyſtême, eſtimée dans le ſens vertical, ſera nulle au premier inſtant.*

Car ſi l'on appelle M la maſſe totale du ſyſtême, m celle de chacun des corps qui le compoſent, u la vîteſſe abſolue de m, V la vîteſſe du centre de gravité eſtimée dans le ſens vertical, g la gravité, ζ l'angle formé par u & par la direction de la peſanteur, on aura, ſuivant le théorême, $\int m g u \cos \zeta = 0$, mais par les propriétés géométriques du centre de gravité, on a $\int m u d t \cos \zeta = M V d t$, ou $\int m g u \cos \zeta = M V g$; donc, puiſque le premier membre de cette équation eſt égal à zéro, le ſecond l'eſt auſſi; donc $V = 0$ *ce qu'il falloit prouver.*

Pour avoir toutes les conditions de l'équilibre dans une Machine à poids, il n'y a donc qu'à faire prendre ſucceſſivement à la Machine différents mouvements géométriques, & égaler dans chacun de ces cas, la vîteſſe verticale du centre de gravité à zéro.

Corollaire III.

Principe général de l'équilibre entre deux poids.

XXXVII. *Lorſque deux poids ſe ſont mutuellement équilibre, ſi l'on fait prendre à la Machine un mouvement quelconque géométrique.*

1°. *Les viteſſes de ces corps, eſtimées dans le ſens vertical, ſeront en raiſon réciproque de leurs poids.*

2°. *L'un de ces corps montera néceſſairement, tandis que l'autre deſcendra.*

Cette propoſition eſt une ſuite manifeſte du corollaire précédent, & ſe déduit plus évidemment encore du corollaire premier.

On peut remarquer en paſſant, combien il eſt eſſentiel pour l'exactitude de toutes ces propoſitions, que les mouvements imprimés à la Machine ſoient géométriques, & non-pas ſimplement poſſibles; car la plus légere attention fera voir par quelque exemple particulier, que ſans cette condition, toutes ces propoſitions ſeroient abſurdes.

Remarque.

XXXVIII. On prend ordinairement pour principe de l'équilibre dans les Machines à poids, qu'alors le centre de gravité du ſyſtême eſt au point le plus bas poſſible; mais on ſait que ce principe n'eſt pas généralement vrai; car outre que ce point pourroit dans certains cas, être au point le plus haut, il y en a une infinité d'autres où il n'eſt ni au point le plus haut, ni au point

le plus bas : par exemple, ſi tout le ſyſtême ſe réduit à un corps peſant, & que ce mobile ſoit placé ſur une courbe qui ait un point d'inflexion, dont la tangente ſoit horiſontale ; il reſtera viſiblement en équilibre, ſi on le met ſur ce point d'inflexion, qui n'eſt cependant ni le poids le plus bas, ni le point le plus haut poſſible.

On peut encore prendre pour principe de l'équilibre dans une Machine à poids, la propoſition que nous avons déjà donnée (II), & que nous allons rapporter encore, pour en donner la démonſtration rigoureuſe.

Pour s'aſſurer que pluſieurs poids appliqués à une Machine quelconque, doivent ſe faire mutuellement équilibre, il ſuffit de prouver que ſi l'on abandonne cette Machine à elle-même, le centre de gravité du ſyſtême ne deſcendra pas.

Pour le prouver, nommons M la maſſe totale du ſyſtême, m celle de chacun des poids qui le compoſent, g la gravité ; & ſuppoſons que ſi la Machine ne demeuroit pas en équilibre, comme je prétends qu'elle doit le faire, la vîteſſe de m après le temps t, fût V, la hauteur dont ſeroit deſcendu le centre de gravité au bout du même temps H, & celle dont ſeroit deſcendu le corps m h ; on aura donc, (XXIV) $\int m g d h - \int m V d V = 0$; donc en intégrant $M g H = \frac{1}{2} \int m V^2$; or par hypotheſe $H = 0$, donc $\int m V^2 = 0$; de plus V^2 eſt néceſſairement poſitive comme il eſt évident ; donc l'équation $\int m V^2 = 0$ ne peut avoir lieu ſans qu'on n'ait $V = 0$, c'eſt-à-dire ſans qu'il y ait équilibre ; *ce qu'il falloit prouver.*

Il ſuit de-là, comme nous l'avons dit (III), qu'il y a néceſſairement équilibre dans un ſyſtême de poids dont le centre de gravité eſt au point

le plus bas poſſible ; mais nous venons de voir (XXXVIII) que l'inverſe n'eſt pas toujours vraie, c'eſt-à-dire que toutes les fois qu'il y a équilibre dans un ſyſtême de poids, il ne s'enſuit pas toujours que le centre de gravité ſoit au point le plus bas poſſible.

Corollaire IV.

Loix particulieres d'équilibre dans les Machines.

XXXIX. *S'il y a équilibre entre pluſieurs puiſſances appliquées à une Machine, & qu'ayant décompoſé toutes les forces du ſyſtême, tant celles qui ſont appliquées à la Machine, que celles qui ſont exercées par les obſtacles mêmes ou points fixes qui en ſont partie ; ſi on les décompoſe, dis-je, chacune en trois autres paralleles à trois axes quelconques perpendiculaires entre eux ;*

1°. *La ſomme des forces compoſantes, qui ſont paralleles à un même axe, & conſpirantes vers un même côté, eſt égale à la ſomme de celles qui, étant paralleles à ce même axe, conſpirent vers le côté oppoſé :*

2°. *La ſomme des momens des forces compoſantes, qui tendent à faire tourner autour d'un même axe, & qui conſpirent dans un même ſens, eſt égale à la ſomme des momens de celles qui tendent à faire tourner autour du même axe, mais en ſens contraire.*

Pour démontrer cette propoſition, commençons par imaginer qu'à la place de chacune des forces exercées par la réſiſtance des obſtacles, on ſubſtitue une force active, égale à cette ré-

ſiſtance, & dirigée dans le même ſens ; ce changement n'altere point l'état d'équilibre, & fait de la Machine un ſyſtême de puiſſances parfaitement libre, c'eſt-à-dire dégagé de tout obſtacle : cela poſé, ſi l'on fait prendre à ce ſyſtême un mouvement quelconque géométrique, on aura par le théorême fondamental $\int F u \cos \zeta = 0$, en nommant F chacune des forces, u ſa vîteſſe, & ζ l'angle compris entre F & u ; donc,

1°. Si l'on ſuppoſe que u ſoit la même pour tous les points du ſyſtême & parallele à l'un des axes quelconque, le mouvement ſera géométrique, & l'équation à cauſe de u conſtante, ſe réduira à $\int F \cos \zeta = 0$: c'eſt-à-dire que la ſomme des forces du ſyſtême, eſtimées dans le ſens de la *vîteſſe* u, imprimée parallelement à cet axe, ſera nulle ; ce qui revient évidemment à la premiere partie de la propoſition.

2°. Si l'on fait tourner tout le ſyſtême autour de l'un, quelconque, des axes, ſans rien changer à la poſition reſpective des parties qui le compoſent, ce mouvement ſera encore géométrique ; u ſera proportionnelle à la diſtance de chaque puiſſance à l'axe ; & partant, pourra s'exprimer par $A R$, R exprimant cette diſtance, & A une conſtante ; donc, l'équation ſe réduira à $\int F R \cos \zeta = 0$; ce qui, comme il eſt aiſé de le voir, revient à la ſeconde partie de la propoſition.

Corollaire V.

Loi particuliere concernant les Machines dont le mouvement change par degrés inſenſibles.

XLI. *Dans une Machine dont le mouvement*

change par degrés inſenſibles, le moment d'activité, conſommé *dans un temps donné par les forces ſollicitantes*, *eſt égal* au moment d'activité, exercé *en même temps par les forces réſiſtantes.*

C'eſt-à-dire (XXXIII), que le *moment d'activité, conſommé* par toutes les forces du ſyſtême, pendant le temps donné, eſt égal à zéro ; ce qui ſera clair (XXXII), ſi l'on prouve que *le moment d'activité, conſommé* à chaque inſtant par ces forces, eſt nul : or, F exprimant chacune de ces forces, V ſa viteſſe, Z l'angle compris entre F & V, & dt l'élément du temps, *le moment d'activité, conſommé* par toutes les forces du ſyſtême pendant dt, eſt (XXXIII), $\int FV \cos Z\, dt$; il faut donc prouver qu'on a $\int FV \cos Z\, dt = 0$, ou $\int FV \cos Z = 0$; or, cela eſt clair par le théorême fondamental : donc, *&c.*

La loi particuliere dont il s'agit ici, eſt certainement la plus importante de toute la théorie du mouvement des Machines proprement dites : en voici quelques applications particulieres, en attendant le détail où nous entrerons à ſon ſujet, dans le ſcholie qui ſuccédera au corollaire ſuivant, & qui terminera cet Eſſai.

XLII. Suppoſons donc, par exemple, que les puiſſances appliquées à la Machine, ſoient des poids ; nommons m la maſſe de chacun de ces corps, M la maſſe totale du ſyſtême, g la gravité, V la viteſſe actuelle du corps m, K ſa viteſſe initiale, t le temps écoulé depuis le commencement du mouvement, H la hauteur dont eſt deſcendu le centre de gravité du ſyſtême pendant le temps t, & enfin, W la viteſſe due à la hauteur H.

Cela poſé, il faut conſidérer qu'il y a deux ſortes de forces appliquées à la Machine ; ſavoir :

celles qui viennent de la peſanteur des corps, & celles qui viennent de leur inertie ou réſiſtance qu'ils oppoſent à leur changement d'état, (note c (XXX)) : or, (XXXII) le moment d'activité, conſommé pendant le temps t, par la premiere de ces forces, eſt pour tout le ſyſtême $M\ g\ H$, ou $\frac{1}{2}\ M\ W^2$; voyons maintenant quel eſt le moment d'activité, conſommé par la force d'inertie : la vîteſſe de m étant V, & devenant l'inſtant d'après $V + dV$, il eſt clair (note b (XXX)), que ſa force d'inertie eſtimée dans le ſens de V, eſt $m\ dV$, ou plutôt $m\frac{dV}{dt}$; donc, (XXX), le moment d'activité, exercé par cette force pendant dt, eſt $m\frac{dV}{dt}\ V\ dt$, ou $m\ V\ dV$; donc, le moment d'activité, conſommé par cette force d'inertie, pendant le temps t, eſt $\int m\ V\ dV$, ou en intégrant & complétant l'intégrale $\frac{1}{2}\ m\ V^2 - \frac{1}{2}\ m\ K^2$; donc le moment d'activité, conſommé en même temps par la force d'inertie, de tous les corps du ſyſtême, ſera $\frac{1}{2}\int m\ V^2 - \frac{1}{2}\int m\ K^2$; or, cette inertie eſt une force réſiſtante, puiſque c'eſt par elle que les corps réſiſtent à leur changement d'état : & la peſanteur eſt ici une force ſollicitante, puiſque le centre de gravité eſt ſuppoſé deſcendre ; donc, par la propoſition de ce corollaire, on doit avoir $M\ W^2 = \int m\ V^2 - \int m\ K^2$, ou $\int m\ V^2 = \int m\ K^2 + M\ W^2$: c'eſt-à-dire que

Dans une Machine à poids, dont le mouvement change par degrés inſenſibles, la ſomme des forces vives du ſyſtême, eſt après un temps quelconque donné, égale à la ſomme des forces vives initiales ; plus, la ſomme de force vive qui auroit lieu, ſi tous

les corps du ſyſtême étoient animés d'une vîteſſe commune, égale à celle qui eſt due à la hauteur dont eſt deſcendu le centre de gravité du ſyſtême.

XLIII. Si le mouvement de la Machine eſt uniforme, on aura continuellement $V = K$, & partant $W^2 = 0$, ou $H = 0$; ce qui nous apprend que

Dans une Machine à poids, dont le mouvement eſt uniforme, le centre de gravité du ſyſtême reſte conſtamment à la même hauteur.

XLIV. Puiſque $\frac{1}{2} M W^2$ ou $M g H$ eſt (XXXII) le moment d'activité, produit par un poids $M g$, qu'on fait monter à la hauteur H, il s'enſuit évidemment que

De quelque maniere qu'on s'y prenne pour élever un certain poids à une hauteur donnée, il faut que les forces qui ſont employées à produire cet effet, conſomment un moment d'activité, égal au produit de ce poids, par la hauteur à laquelle on doit l'élever.

XLV. De même, puiſque (XLII) le moment d'activité, produit dans un temps donné par la force d'inertie d'un corps, eſt égal à la moitié de la quantité dont ſa force vive augmente pendant ce temps; on peut conclure auſſi que

Pour faire naître un certain mouvement quelconque par dégrés inſenſibles dans un ſyſtême de corps, ou changer celui qu'il a, il faut que les puiſſances deſtinées à cet effet, conſomment un moment d'activité, égal à la moitié de la quantité dont aura augmenté par ce changement la ſomme des forces vives du ſyſtême.

XLVI. Il ſuit évidemment de ces deux dernieres propoſitions, que pour élever un poids $M g$ à une hauteur H, & lui faire prendre en même temps une vîteſſe V, il faut, en ſuppoſant

ce corps en repos au premier instant, que les forces employées à produire cet effet, consomment elles-mêmes un moment d'activité égal à $MgH + \frac{1}{2} MV^2$.

LXVII. On suppose dans tout ce qui vient d'être dit, comme l'annonce le titre de ce corollaire, que le mouvement change par degrés insensibles; mais, si chemin faisant, il arrivoit un choc ou changement subit dans le système, ce que nous venons de dire n'auroit plus lieu. Supposons, par exemple, qu'au moment où arrive le choc, le centre de gravité du système soit descendu de la hauteur h; qu'à ce même instant, la somme des forces vives soit X immédiatement avant le choc, & Y immédiatement après; nommons Q le moment d'activité qu'auront à consommer les forces mouvantes pendant tout le temps du mouvement, & q celui qu'elles auront à consommer depuis le commencement jusqu'à l'époque de la percussion; supposons enfin, pour plus de simplicité, que le système soit en repos au premier instant & au dernier, il est clair (XLVI) qu'on aura $q = Mgh + \frac{1}{2} X$, & que par la même raison, le moment d'activité à consommer par les forces mouvantes après le choc, c'est-à-dire $Q - q$ sera $Mg(H - h) - \frac{1}{2} Y$, donc $Q = MgH + \frac{1}{2} X - \frac{1}{2} Y$; or, (XXIII) il est clair que $X > Y$, donc, le moment d'activité à consommer pour élever dans ce cas M à la hauteur H, est nécessairement plus grand que s'il n'y avoit point de choc, puisque dans ce cas, on auroit simplement $Q = MgH$ (XLIV).

Il suit de là, que sans consommer un plus grand moment d'activité, les forces mouvantes peuvent, en évitant qu'il y ait choc, élever le même poids à une hauteur plus grande H, car

alors on aura (XLVI) $Q = Mg H'$, ou $H' = \frac{Q}{Mg}$, tandis que dans le cas préſent, on a $H = \frac{Q - \frac{1}{n}(X - Y)}{Mg}$: d'où l'on voit que X étant plus grande que Y, il faut néceſſairement qu'on ait auſſi $H' > H$.

Corollaire VI.

Des Machines hydrauliques.

XLXVIII. On peut regarder un fluide comme l'aſſemblage d'une infinité de corpuſcules ſolides, détachés les uns des autres ; on peut donc appliquer aux Machines hydrauliques tout ce que nous avons dit des autres Machines : ainſi, par exemple, du corollaire premier (XXXV), on peut conclure que ſi une maſſe fluide, ſans peſanteur, étant enfermée de tout côté dans un vaſe, & qu'ayant fait à ce vaſe deux petites ouvertures égales, on y applique des piſtons ; les forces qui agiront ſur la maſſe fluide, en pouſſant ces piſtons, ne peuvent qu'être égales, ſi elles ſe ſont mutuellement équilibre ; c'eſt-à-dire donc que dans une maſſe fluide, la preſſion ſe répand également en tout ſens ; c'eſt le principe fondamental de l'équilibre des fluides, qu'on regarde ordinairement comme une vérité purement expérimentale : on prouvera de même (XXV) que la conſervation des forces vives a lieu dans les fluides incompreſſibles, dont le mouvement change par degrés inſenſibles ; & généralement enfin tout ce que nous avons prouvé d'un ſyſtême de corps durs, eſt également vrai pour une maſſe de fluide incompreſſible. *Scholie.*

Scholie.

XLIX. Ce ſcholie eſt deſtiné au développement du principe énoncé dans le corollaire V ; cette propoſition renferme en effet la principale partie de la théorie des Machines en mouvement, parce que la plupart d'entr'elles ſont mues par des agents qui ne peuvent exercer que des forces mortes ou de preſſion ; tels ſont tous les animaux, les reſſorts, les poids, *&c.* ce qui fait que la Machine change ordinairement d'état par degrés inſenſibles. Il arrive même le plus ſouvent que cette Machine paſſe bien vîte à l'uniformité de mouvement ; en voici la raiſon :

Les agents qui font mouvoir cette Machine, ſe trouvant d'abord un peu au deſſus des forces réſiſtantes, font naître un petit mouvement qui s'accélere enſuite peu-à-peu ; mais ſoit que par une ſuite néceſſaire de cette accélération, la force ſollicitante diminue, ſoit que la réſiſtance augmente, ſoit enfin qu'il ſurvienne quelque variation dans les directions, il arrive preſque toujours que le rapport des deux forces s'approche de plus en plus de celui en vertu duquel elles pourroient ſe faire mutuellement équilibre : alors ces deux forces ſe détruiſent, & la Machine ne ſe meut plus qu'en vertu du mouvement acquis, lequel, à cauſe de l'inertie de la matiere, reſte ordinairement uniforme.

L. Pour comprendre encore mieux comment cela doit arriver, il n'y a qu'à faire attention au mouvement que prend un navire qui a le vent en poupe ; c'eſt une eſpece de Machine animée par deux forces contraires qui ſont l'impulſion du vent & la réſiſtance du fluide ſur lequel il

vogue : ſi la premiere de ces deux forces qu'on peut regarder comme ſollicitante, eſt la plus grande, le mouvement du navire s'accélérera ; mais cette accélération a néceſſairement des bornes, par deux raiſons; car, plus le mouvement du navire s'accélere, 1°. plus il eſt ſouſtrait à l'impulſion du vent ; 2°. plus au contraire la réſiſtance de l'eau augmente : par conſéquent, ces deux forces tendent à l'égalité : lorſqu'elles y ſeront parvenues, elles ſe détruiront mutuellement ; & partant, le navire ſera mu comme un corps libre, c'eſt-à-dire que ſa viteſſe ſera conſtante. Si le vent venoit à baiſſer, la réſiſtance de l'eau ſurpaſſeroit la force ſollicitante ; le mouvement du navire ſe ralentiroit ; mais par une ſuite néceſſaire de ce ralentiſſement, le vent agiroit plus efficacement ſur les voiles ; & la réſiſtance de l'eau diminueroit en même temps : ces deux forces tendroient donc encore à l'égalité, & la Machine arriveroit de même à l'uniformité de mouvement.

LI. La même choſe arrive lorſque les forces mouvantes ſont des hommes, des animaux ou autres agents de cette nature : dans les premiers inſtants, le moteur eſt un peu au deſſus de la réſiſtance ; de là naît un petit mouvement qui s'accélere peu-à-peu, par les coups répétés de la force mouvante ; mais l'agent lui-même eſt obligé de prendre un mouvement accéléré, afin de reſter attaché au corps auquel il imprime le mouvement. cette accélération qu'il ſe procure à lui-même, conſomme une partie de ſon effort ; de ſorte qu'il agit moins efficacement ſur la Machine, & que le mouvement de celle-ci s'accélérant de moins en moins, finit par devenir bientôt uniforme. Par exemple, un homme qui pourroit faire un

certain effort dans le cas d'équilibre, en feroit un beaucoup moindre, ſi le corps auquel il eſt appliqué lui céde, & qu'il ſoit obligé de le ſuivre pour agir ſur lui : ce n'eſt pas que le travail abſolu de cet homme ſoit moindre, mais c'eſt que ſon effort eſt partagé en deux, dont l'un eſt employé à mettre la maſſe même de l'homme en mouvement, & l'autre, tranſmis à la Machine. Or, c'eſt de ce dernier ſeul que l'effet ſe manifeſte dans l'objet qu'on s'eſt propoſé.

Je continuerai cependant de conſidérer les Machines ſous un point de vue plus général : ainſi je placerai dans ce ſcholie pluſieurs réflexions applicables au mouvement varié ; je ſuppoſerai ſeulement que cette variation ſe fait par degrés inſenſibles, & je prouverai que cela doit être en effet, lorſqu'on veut les employer de la maniere la plus avantageuſe poſſible.

LII. Déſignons donc par Q le moment d'activité, conſommé par les forces ſollicitantes dans un temps donné t, & par q le moment d'activité exercé en même temps par les forces réſiſtantes : cela poſé, quel que ſoit le mouvement de la Machine, nous aurons toujours, par le corollaire V, $Q = q$; de ſorte, par exemple, que ſi chacune F des forces ſollicitantes, eſt conſtante, ſa viteſſe V uniforme, & l'angle Z formé par les directions de F & V, toujours nul, on aura au bout du temps t $\int F V t = q$; & ſi toutes les forces ſollicitantes ſe réduiſent à une ſeule, on aura par conſéquent $F V t = q$ (XXXII & XXXIII).

LIII. On peut en général regarder le moment q d'activité, exercé par les forces réſiſtantes, comme l'effet produit par les forces ſollicitantes ; par exemple, lorſqu'il s'agit d'élever un poids P à une hauteur donnée H, il eſt tout ſimple de

regarder l'effet produit par la force mouvante, comme étant en raiſon compoſée du poids & de la hauteur à laquelle il a fallu l'élever ; de ſorte que P_H eſt ce qu'on entend alors naturellement par l'effet produit. Or, d'un autre côté, cette quantité P_H eſt préciſément ce que nous avons appellé moment d'activité, exercé par la force réſiſtante P ; donc ce moment d'activité, ou q, eſt ce qu'on entend naturellement, dans ce cas, par l'effet produit.

Or, dans les autres cas, il eſt évident que q eſt toujours une quantité analogue à celle dont il vient d'être queſtion ; c'eſt pourquoi j'appellerai ſouvent dans la ſuite cette quantité, q, *effet produit* : ainſi, par *effet produit*, j'entendrai le moment d'activité, exercé par les forces réſiſtantes ; de ſorte qu'en vertu de l'équation $Q = q$, on peut établir pour regle générale, que *l'effet produit dans un temps donné par un ſyſtême quelconque de forces mouvantes, eſt égal au moment d'activité conſommé en même temps par toutes ces forces.*

LIV. On voit par l'équation $FVt = q$, trouvée dans l'article précédent, qu'il eſt inutile de connoître la figure d'une Machine, pour ſavoir quel effet peut produire une puiſſance qui lui eſt appliquée, lorſqu'on connoît celui qu'elle pourroit produire ſans Machine : ſuppoſons, par exemple, qu'un homme ſoit capable d'exercer un effort continuel de 25 ℔, en ſe mouvant continuellement lui-même avec une vîteſſe de trois pieds par ſeconde ; cela poſé, lorſqu'on l'appliquera à une Machine, le moment d'activité FVt qu'exercera cet homme, ſera (XXXII) 25 ℔ 3 p^{i}. t, c'eſt-à-dire qu'on aura $FVt = 25$ ℔ 3 p$_{i}$. t, t exprimant le nombre des ſecondes ; donc, à cauſe de $FVt = q$, on aura $q = 25$ ℔ 3 p^{i}. t, quelle que puiſſe

être la Machine ; donc, l'effet q eſt abſolument indépendant de la figure de cette Machine, & ne peut jamais ſurpaſſer celui que la puiſſance eſt en état de produire naturellement & ſans Machine.

Ainſi, par exemple, ſi cet homme avec ſon effort de 25 ^{tt}, & ſa vîteſſe de trois pieds par ſeconde, eſt en état avec une Machine donnée, ou ſans Machine, d'élever dans un temps donné, un poids p à une hauteur H, on ne peut inventer aucune Machine par laquelle il ſoit poſſible, avec le même travail, (c'eſt-à-dire la même force & la même vîteſſe que dans le premier cas), d'élever dans le temps donné, le même poids à une plus grande hauteur, ou un poids plus grand à la même hauteur, ou enfin le même poids à la même hauteur dans un temps plus court : ce qui eſt évident, puiſqu'alors q étant (XXXII) égal à $P\,H$, on a par l'article précédent, $P\,H = 25^{tt}$ 3 p^{i}. t.

L V. L'avantage que procurent les Machines, n'eſt donc pas de produire de grands effets avec de petits moyens, mais de donner à choiſir entre différents moyens qu'on peut appeller égaux, celui qui convient le mieux à la circonſtance préſente. Pour forcer un poids P à monter à une hauteur propoſée, un reſſort à ſe fermer d'une quantité donnée, un corps à prendre par degrés inſenſibles un mouvement donné, ou enfin tel autre agent que ce ſoit, à produire un moment quelconque donné d'activité, il faut que les forces mouvantes qui y ſont deſtinées, conſomment elles-mêmes un moment d'activité, égal au premier ; aucune Machine ne peut en diſpenſer ; mais comme ce moment réſulte de pluſieurs termes ou facteurs, on peut les faire varier à volonté, en diminuant la

force aux dépens du temps, ou la vîteſſe aux dépens de la force ; ou bien, en employant deux ou pluſieurs forces au lieu d'une ; ce qui donne une infinité de reſſources pour produire le moment d'activité néceſſaire ; mais quoi qu'on faſſe, il faut toujours que ces moyens ſoient égaux, c'eſt-à-dire que le moment d'activité conſommé par les forces ſollicitantes, ſoit égal à l'effet ou moment exercé en même temps par les forces réſiſtantes.

LVI. Ces réflexions paroiſſent ſuffiſantes pour déſabuſer ceux qui croient qu'avec des Machines chargées de leviers arrangés myſtérieuſement, on pourroit mettre un agent, ſi foible qu'il fût, en état de produire les plus grands effets : l'erreur vient de ce qu'on ſe perſuade qu'il eſt poſſible d'appliquer aux Machines en mouvement, ce qui n'eſt vrai que pour le cas d'équilibre ; de ce qu'une petite puiſſance, par exemple, peut tenir en équilibre un très-grand poids, beaucoup de perſonnes croient qu'elle pourroit de même élever ce poids auſſi vîte qu'on voudroit ; or, c'eſt une erreur très-grande, parce que, pour y réuſſir, il faudroit que l'agent ſe procurât à lui-même une vîteſſe au deſſus de ſes facultés, ou qui du moins, lui feroit perdre une partie d'autant plus grande de ſon effort ſur la Machine, qu'il ſeroit obligé de ſe mouvoir plus vîte. Dans le premier cas, l'agent n'a d'autre objet à remplir, que de faire un effort capable de contrebalancer le poids ; dans le ſecond, il faut qu'outre cet effort, il en faſſe encore un autre pour vaincre l'inertie, & du corps auquel il imprime le mouvement, & de ſa propre maſſe ; l'effort total qui, dans le premier cas, ſeroit employé tout entier à vaincre la peſanteur du corps, ſe partage donc ici en deux, dont le premier continue de faire équilibre au poids, & l'autre produit le mouvement. On

ne peut donc augmenter l'un de ces efforts, qu'aux dépens de l'autre ; & voilà pourquoi l'effet des Machines en mouvement, eſt toujours tellement limité, qu'il ne peut jamais ſurpaſſer le moment d'activité exercé par l'agent qui le produit.

C'eſt ſans doute faute de faire une attention ſuffiſante à ces différents effets d'une même Machine conſidérée tantôt en repos, & tantôt en mouvement, que des perſonnes auxquelles la ſaine théorie n'eſt point inconnue, s'abandonnent quelquefois aux idées les plus chimériques, tandis qu'on voit de ſimples ouvriers, faire valoir, par une eſpece d'inſtinct, les propriétés réelles des Machines, & juger très-bien de leurs effets. *Archimede* ne demandoit qu'un levier & un point fixe pour ſoulever le globe de la terre ; comment donc ſe peut-il faire, dit-on, qu'un homme auſſi fort qu'*Archimede*, ne puiſſe pas, quand même il ſeroit muni de la plus belle Machine du monde, élever un poids de cent livres, en une heure de temps, à une hauteur médiocre donnée? C'eſt que l'effet d'une Machine en repos, & celui d'une Machine en mouvement, ſont deux choſes fort différentes, & en quelque choſe hétérogenes : dans le premier cas, il s'agit de détruire, d'empêcher le mouvement ; dans le ſecond, l'objet eſt de le faire naître & de l'entretenir ; or, il eſt clair que ce dernier cas exige une conſidération de plus que le premier ; ſavoir : la vîteſſe réelle de chaque point du ſyſtême ; mais on pourra ſentir mieux la raiſon de cette différence, par la remarque ſuivante.

Les points fixes & obſtacles quelconques, ſont des forces purement paſſives, qui peuvent abſorber un mouvement, ſi grand qu'il ſoit, mais qui ne peuvent jamais en faire naître un, ſi petit qu'on

veuille l'imaginer, dans un corps en repos : or, c'eſt improprement que dans le cas d'équilibre, on dit d'une petite puiſſance, qu'elle en détruit une grande : ce n'eſt pas par la petite puiſſance, que la grande eſt détruite ; c'eſt par la réſiſtance des points fixes : la petite puiſſance ne détruit réellement qu'une petite partie de la grande, & les obſtacles font le reſte. Si *Archimede* avoit eu ce qu'il demandoit, ce n'eſt pas lui qui auroit ſoutenu le globe de la terre, c'eſt ſon point fixe ; tout ſon art auroit conſiſté, non à redoubler d'effort pour luter contre la maſſe de ce globe, mais à mettre en oppoſition les deux grandes forces, l'une active, l'autre paſſive, qu'il auroit eues à ſa diſpoſition : ſi au contraire il eût été queſtion de faire naître un mouvement effectif, alors *Archimede* auroit été obligé de le tirer tout entier de ſon propre fond ; auſſi n'auroit-il pu être que très-petit, même après pluſieurs années : n'attribuons donc point aux forces actives, ce qui n'eſt dû qu'à la réſiſtance des obſtacles, & l'effet ne paroîtra pas plus diſproportionné à la cauſe, dans les Machines en repos, que dans les Machines en mouvement.

LVII. Quel eſt donc enfin le véritable objet des Machines en mouvement ? Nous l'avons déjà dit ; c'eſt de procurer la faculté de faire varier à volonté, les termes de la quantité Q, ou *momentum* d'activité, qui doit être exercé par les forces mouvantes. Si le temps eſt précieux, que l'effet doive être produit dans un temps très-court, & qu'on n'ait cependant qu'une force capable de peu de vîteſſe, mais d'un grand effort, on pourra trouver une Machine pour ſuppléer la vîteſſe néceſſaire par la force : s'il faut au contraire élever un poids très-conſidérable, & qu'on n'ait qu'une foible puiſſance, mais capable d'une grande vî-

teſſe, on pourra imaginer une Machine avec laquelle l'agent ſera en état de compenſer par ſa vîteſſe, la force qui lui manque : enfin, ſi la puiſſance n'eſt capable ni d'un grand effort, ni d'une grande vîteſſe, on pourra encore, avec une Machine convenable, lui faire produire l'effet deſiré ; mais alors on ne pourra ſe diſpenſer d'employer beaucoup de temps ; & c'eſt en cela que conſiſte ce principe ſi connu, que *dans les Machines en mouvement, on perd toujours en temps ou en vîteſſe ce qu'on gagne en force.*

Les Machines ſont donc très-utiles, non en augmentant l'effet dont les puiſſances ſont naturellement capables, mais en modifiant cet effet : on ne parviendra jamais par elles, il eſt vrai, à diminuer la dépenſe ou *momentum* d'activité, néceſſaire pour produire un effet propoſé ; mais elles pourront aider à faire de cette quantité une répartition convenable au deſſein qu'on a en vue : c'eſt par leur ſecours qu'on réuſſira à déterminer, ſinon le mouvement abſolu de chaque partie du ſyſtême, du moins à établir entre ces différents mouvements particuliers, les rapports qui conviendront le mieux ; c'eſt par elles enfin qu'on donnera aux forces mouvantes, les ſituations & directions les plus commodes, les moins fatigantes, les plus propres à employer leurs facultés de la maniere la plus avantageuſe.

LVIII. Ceci nous conduit naturellement à cette queſtion intéreſſante : quelle eſt la meilleure maniere d'employer des puiſſances données, & dont l'effet naturel eſt connu, en les appliquant aux Machines en mouvement ? C'eſt-à-dire, quel eſt le moyen de leur faire produire le plus grand effet poſſible ?

La ſolution de ce problême dépend des cir-

conſtances particulieres ; mais on peut faire là-deſſus des obſervations générales & applicables à tous les cas : en voici quelques-unes des plus eſſentielles.

L'effet produit étant la même choſe (LIII) que le moment d'activité exercé par les forces réſiſtantes, la condition générale, eſt que q ſoit un *maximum* ; or, q ne pouvant jamais ſurpaſſer Q, il faut, 1°. que la quantité Q ſoit elle-même la plus grande poſſible ; 2°. que tout ce moment Q ſoit employé uniquement à produire l'effet propoſé.

Pour faire que Q ſoit un *maximum*, il faut conſidérer qu'elle dépend de quatre choſes, ſavoir ; de la quantité de force exercée par l'agent qui doit produire l'effet q, de ſa vîteſſe, de ſa direction, & du temps pendant lequel il agit. Or, 1°. quant à ce qui regarde la direction de la force, il eſt évident que cette puiſſance doit être, toutes choſes égales d'ailleurs, dirigée dans le même ſens que ſa vîteſſe ; car le moment d'activité qu'exerce pendant dt une puiſſance F dont la vîteſſe eſt V, & l'angle compris entre F & V, Z, étant (XXXII) $FVdt \cos Z$, il eſt clair que ce produit ne ſera jamais plus grand que lorſque $\cos Z$ ſera égal au ſinus total, c'eſt-à-dire lorſque la force & ſa vîteſſe ſeront dirigées dans le même ſens ; 2°. quant à ce qui regarde l'intenſité de la force exercée, ſa vîteſſe, & le temps pendant lequel elle eſt exercée ; on ne ne doit point déterminer ces choſes d'une maniere abſolue, mais ſeulement mettre entr'elles les rapports que l'expérience aura fait connoître pour les plus avantageux : par exemple, on a reconnu, je ſuppoſe, qu'un homme attaché pendant huit heures par jour à une manivelle d'un pied de

rayon, peut faire continuellement un effort de 25 ℔, en faiſant un tour en deux ſecondes, ce qui fait à peu-près la vîteſſe de trois pieds par ſeconde; mais ſi l'on forçoit cet homme à aller beaucoup plus vîte, croyant par là avancer la beſogne, on la retarderoit, parce qu'il ne ſeroit plus en état de faire un effort de 25 ℔, ou ne pourroit plus ſoutenir un travail de huit heures par jour. Si au contraire, on diminuoit la vîteſſe, la force augmenteroit, mais dans un moindre rapport; & le moment d'activité diminueroit encore: ainſi, ſuivant l'expérience, pour que ce moment ſoit un *maximum*, il faut proportionner la Machine, de maniere à conſerver à la puiſſance la vîteſſe de trois pieds par ſeconde, & ne le faire travailler qu'environ huit heures par jour. On ſent bien que chaque eſpece d'agent a, eu égard à ſa nature ou conſtitution phyſique, un *maximum* analogue à celui dont on vient de parler, & que ce *maximum* ne peut en général ſe trouver que par expérience.

LIX. Cette premiere condition étant remplie, il ne reſtera donc plus, pour faire produire à une Machine donnée, le plus grand effet poſſible, qu'à faire enſorte que toute la quantité Q ſoit employée à produire cet effet; car ſi cela eſt ainſi, on aura $q = Q$; & c'eſt tout ce qu'on peut prétendre, puiſque jamais Q ne peut être moindre que q.

Or, pour remplir cette condition, je dis premiérement, qu'on doit éviter tout choc ou changement bruſque quelconque; car il eſt facile d'appliquer à tous les cas imaginables, le raiſonnement qui a été fait (XLVII) ſur les Machines à poids; d'où il ſuit que toutes les fois qu'il y a choc, il y a en même temps perte de moment

d'activité de la part des forces ſollicitantes ; perte ſi réelle, que l'effet en eſt néceſſairement diminué, comme nous l'avons fait voir par les Machines à poids, dans l'article qui vient d'être cité : c'eſt donc avec raiſon que nous avons avancé (LI), que pour faire produire aux Machines le plus grand effet poſſible, il faut néceſſairement qu'elles ne changent jamais de mouvement, que par degrés inſenſibles ; il en faut ſeulement excepter celles qui, par leur nature même, ſont ſujettes à éprouver différentes percuſſions, comme ſont la plupart des moulins ; mais dans ce cas-là même, il eſt clair qu'on doit éviter tout changement ſubit, qui ne ſeroit pas eſſentiel à la conſtitution de la Machine.

LX. On peut conclure de là, par exemple, que le moyen de faire produire le plus grand effet poſſible à une Machine hydraulique, mue par un courant d'eau, n'eſt pas d'y adapter une roue dont les aîles reçoivent le choc du fluide. En effet, deux raiſons empêchent qu'on ne produiſe ainſi le plus grand effet : la premiere eſt celle que nous venons de dire, ſavoir ; qu'il eſt eſſentiel d'éviter toute percuſſion quelconque ; la ſeconde eſt, qu'après le choc du fluide, il a encore une vîteſſe qui lui reſte en pure perte, puiſqu'on pourroit employer ce reſte à produire encore un nouvel effet qui s'ajouteroit au premier. Pour faire la Machine hydraulique la plus parfaite, c'eſt-à-dire capable de produire le plus grand effet poſſible, le vrai nœud de la difficulté conſiſteroit donc, 1°. à faire enſorte que le fluide perdît abſolument tout ſon mouvement par ſon action ſur la Machine, ou que du moins il ne lui en reſtât préciſément que la quantité néceſſaire pour s'échapper après ſon action ; 2°. à ce qu'il perdît tout ce mouve-

ment par degrés insensibles, & sans qu'il y eût aucune percussion, ni de la part du fluide, ni de la part des parties solides entr'elles : peu importeroit d'ailleurs quelle fût la forme de la Machine, car une Machine hydraulique qui remplira ces deux conditions, produira toujours le plus grand effet possible ; mais ce problême est très-difficile à résoudre en général, pour ne pas dire impossible ; peut-être même que dans l'état physique des choses, & eu égard à la simplicité, il n'y a rien de mieux que les roues mues par le choc ; & dans ce cas, comme il est impossible de remplir à la fois les deux conditions desirables, que plus on voudra faire perdre au fluide de son mouvement pour approcher de la premiere condition, plus le choc sera fort ; que plus au contraire on voudra modérer le choc pour approcher de la seconde, moins le fluide perdra de son mouvement : on sent qu'il y a un milieu à prendre, au moyen duquel on déterminera, sinon d'une maniere absolue, au moins eu égard à la nature de la Machine, celle qui sera capable du plus grand effet.

LXI. Une autre condition générale qui n'est pas moins importante, lorsqu'on veut que les Machines produisent le plus grand effet possible, c'est de faire ensorte que les forces sollicitantes ne fassent naître aucun mouvement inutile à l'objet qu'on se propose : si mon but, par exemple, est d'élever à une hauteur donnée la plus grande quantité d'eau possible, soit avec une pompe ou autrement, je dois faire ensorte que l'eau, en arrivant dans le réservoir supérieur, n'ait précisément qu'autant de vîtesse qu'il lui en faut pour s'y rendre, car toute celle qu'elle auroit au delà, consommeroit inutilement l'effort de la puissance motrice. Il est clair en effet (XLV) que dans ce

cas cette puiſſance auroit à conſommer un moment d'activité inutile, & qui ſeroit égal à la moitié de la force vive avec laquelle l'eau ſeroit arrivée dans le réſervoir.

Il n'eſt pas moins évident que pour faire produire aux Machines le plus grand effet poſſible, on doit éviter ou diminuer, du moins autant que faire ſe peut, les forces paſſives, telles que le frottement, la roideur des cordes, la réſiſtance de l'air, leſquelles ſont toujours, dans quelque ſens que ſe meuve la Machine, au nombre des forces que j'ai nommées reſiſtantes (1).

Enfin, il eſt aiſé d'étendre ces remarques particulieres; & mon objet n'eſt pas d'entrer là-deſſus dans un plus grand détail.

LXII. On peut conclure de ce que nous venons de dire au ſujet du frottement & autres forces paſſives, que le mouvement perpétuel eſt une choſe abſolument impoſſible, en n'employant, pour le produire, que des corps qui ne ſeroient ſollicités par aucune force motrice, & même des corps peſants; car ces forces paſſives auxquelles on ne peut ſe ſouſtraire, étant toujours réſiſtan-

(1) On parle ſouvent des forces paſſives; mais qu'eſt-ce qu'une force paſſive; qu'eſt-ce qui la différencie d'une force active? Je crois qu'on n'a pas encore répondu à cette queſtion, & même qu'on ne ſe l'eſt jamais faite. Or, il me ſemble que le caractere diſtinctif des forces paſſives, conſiſte en ce qu'elles ne peuvent jamais devenir ſollicitantes, quel que ſoit ou puiſſe être le mouvement de la Machine, au lieu que les forces actives peuvent agir, tantôt en qualité de forces ſollicitantes, & tantôt en qualité de forces réſiſtantes. Sur ce pied, les obſtacles & points fixes ſont évidemment des forces paſſives, puiſqu'ils ne peuvent agir ni comme forces ſollicitantes, ni comme forces réſiſtantes (XXXI).

tes, il eſt évident que le mouvement doit ſe ralentir continuellement : & d'après ce que nous avons dit (XLV), on voit que ſi les corps ne ſont ſollicités par aucune force motrice, la ſomme des forces vives ſera réduite à rien ; c'eſt-à-dire que la Machine ſera réduite au repos, lorſque le moment d'activité, produit par le frottement depuis le commencement du mouvement, ſera devenu égal à la demi-ſomme des forces vives initiales : & ſi les corps ſont peſants, le mouvement finira, lorſque le moment produit par les frottements, ſera égal à la demi-ſomme des forces vives initiales, plus la moitié de la force vive qui auroit lieu, ſi tous les points du ſyſtême avoient une vîteſſe commune, égale à celle qui eſt due à la hauteur du point où etoit le centre de gravité dans le premier inſtant du mouvement, au deſſus du point le plus bas où il puiſſe deſcendre ; ce qui eſt évident par l'article (XLII).

Il eſt aiſé d'appliquer les mêmes raiſonnements au cas où il y a desreſſorts, & en général, à tous ceux où, abſtraction faite du frottement, les forces ſollicitantes ſont obligées, pour faire paſſer la Machine d'une poſition à une autre, d'exercer un moment d'activité auſſi grand que celui qui eſt produit par les forces réſiſtantes, lorſque la Machine revient de cette derniere poſition à la premiere.

Le mouvement finiroit bien plus vîte encore, s'il arrivoit quelque percuſſion, puiſque la ſomme des forces vives, diminue toujours en pareil cas (XXIII).

Il eſt donc évident qu'on doit déſeſpérer abſolument de produire ce qu'on appelle un mouvement perpétuel, s'il eſt vrai que toutes les forces motrices qui exiſtent dans la nature, ne

ſoient autre choſe que des attractions, & que cette force ait pour propriété générale, comme il le paroît, d'être toujours la même à diſtances egales, entre des corps donnés, c'eſt à-dire d'être une fonction qui ne varie que dans le cas où la diſtance de ces corps varie elle-même.

LXIV. Une obſervation générale qui réſulte de tout ce qui vient d'être dit, c'eſt que cette eſpece de quantité, à laquelle j'ai donné le nom de *moment d'activité*, joue un très-grand rôle dans la théorie des Machines en mouvement : car c'eſt en général cette quantité qu'il faut économiſer le plus qu'il eſt poſſible, pour tirer d'un agent tout l'effet dont il eſt capable.

S'agit-il d'élever un poids, de l'eau, par exemple, à une hauteur donnée ; vous en éleverez d'autant plus dans un temps donné, non que vous aurez conſommé une plus grande quantité de force, mais que vous aurez exercé un plus grand moment d'activité (XLIV).

Qu'il ſoit queſtion de faire tourner la meule d'un moulin, ſoit par le choc de l'eau, ſoit par le vent, ſoit par la force des animaux, ce n'eſt pas à faire que le choc de l'eau, de l'air, ou l'effort de l'animal ſoit le plus grand que vous devez vous attacher, mais à faire conſommer à ces agents le plus grand moment d'activité poſſible.

Veut-on faire un vuide quelconque dans l'air, de quelque maniere qu'on s'y prenne, il faudra, pour y parvenir, conſommer un *moment d'activité* auſſi grand que celui qui ſeroit néceſſaire pour élever à trente-deux pieds de hauteur, un volume d'eau égal au vuide qu'on veut occaſionner.

Eſt-ce un vuide dans une maſſe d'eau indéfinie comme la mer ; il faudra conſommer pour cela

le

le même *moment d'activité* que ſi la mer étoit un vuide, le vuide qu'on veut faire un volume d'eau de mer, & qu'il fallût élever ce volume à la hauteur du niveau de la mer.

Eſt-ce dans un vaſe de figure donnée, qu'il faut produire un vuide? On ne peut viſiblement y parvenir, ſans faire monter le centre de gravité de la maſſe totale du fluide d'une quantité déterminée par la figure du vaſe; il faudra donc conſommer un *moment d'activité* égal à celui qui ſeroit néceſſaire pour élever toute l'eau du vaſe d'une quantité égale à celle dont il faut que monte le centre de gravité du fluide.

Dans une Machine en repos, où il n'y a d'autre force à vaincre que l'inertie des corps, voulez-vous y faire naître un mouvement quelconque, par degrés inſenſibles, le *moment d'activité* que vous aurez à conſommer, ſera égal à la demi-ſomme des forces vives que vous y ferez naître; & s'il eſt ſeulement queſtion de changer le mouvement qu'elle a déjà, le *moment d'activité* à produire, ſera ſeulement la quantité dont cette demi-ſomme augmentera par le changement (XLV).

Enfin, ſuppoſons qu'on ait un ſyſtême quelconque de corps, que ces corps s'attirent les uns les autres, en raiſon d'une fonction quelconque de leurs diſtances; ſuppoſons même, ſi l'on veut, que cette loi ne ſoit pas la même pour toutes les parties du ſyſtême, c'eſt-à-dire que cette attraction ſuive quelle loi on voudra, (pourvu qu'entre deux corps donnés, elle ne varie que lorſque la diſtance de ces corps varie elle-même), & qu'il ſoit queſtion de faire paſſer le ſyſtême d'une poſition quelconque donnée à une autre; cela poſé, quelle que ſoit la route qu'on fera prendre à chacun des corps, pour remplir cet

objet, qu'on mette tous ces corps en mouvement à la fois, ou les uns après les autres, qu'on les conduiſe d'une place à l'autre, par un mouvement rectiligne ou curviligne, & varié d'une maniere quelconque, (pourvu qu'il n'arrive aucun choc ni changement bruſque); qu'on emploie enfin quelles Machines on voudra, même à reſſort, pourvu que dans ce cas, on remette à la fin les reſſorts au même état de tenſion où on les a pris au premier inſtant; le *moment d'activité* qu'auront à conſommer, pour produire cet effet, les agents extérieurs employés à mouvoir ce ſyſtême, ſera toujours le même, en ſuppoſant que le ſyſtême ſoit en repos au premier inſtant du mouvement, & au dernier.

Et ſi outre cela, il s'agit de faire naître dans le ſyſtême un mouvement quelconque, ou qu'il ſoit déjà en mouvement au premier inſtant, & qu'il s'agiſſe de modifier ou changer ce mouvement, le *moment d'activité* qu'auront à conſommer les agents extérieurs, ſera égal à celui qu'il faudroit conſommer, s'il s'agiſſoit ſeulement de changer la poſition du ſyſtême, ſans lui imprimer de mouvement, (c'eſt-à-dire conſidéré comme en repos au premier inſtant & au dernier); plus, la moitié de la quantité dont il faudra augmenter la ſomme des forces vives.

Il importe donc fort peu, quant à la dépenſe ou *momentum* d'activité à conſommer, que les forces employées ſoient grandes ou petites, qu'elles emploient telles ou telles Machines, qu'elles agiſſent ſimultanement ou non; ce moment d'activité eſt toujours égal au produit d'une certaine force, par une viteſſe & par un temps, ou la ſomme de pluſieurs produits de cette nature; & cette ſomme doit être toujours la même, de quelque

maniere qu'on s'y prenne : les agents ne gagneront donc jamais rien d'un côté, qu'ils ne le perdent de l'autre.

Pour concluſion ; qu'en général on ait un ſyſtême quelconque de corps animés, de forces motrices quelconques, & que pluſieurs agents extérieurs, comme des hommes ou des animaux, ſoient employés à mouvoir ce ſyſtême en différentes manieres quelconques, ſoit par eux-mêmes, ſoit par des Machines : cela poſé ;

Quel que ſoit le changement occaſionné dans le ſyſtême, le moment d'activité, conſommé pendant un temps quelconque par les puiſſances extérieures, ſera toujours égal à la moitié de la quantité dont la ſomme des forces vives aura augmenté pendant ce temps, dans le ſyſtême des corps auxquels elles ſont appliquées : moins la moitié de la quantité dont auroit augmenté cette même ſomme de forces vives, ſi chacun des corps s'étoit mu librement ſur la courbe qu'il a décrite, en ſuppoſant qu'alors il eût éprouvé à chaque point de cette courbe, la même force motrice, que celle qu'il y éprouve réellement : pourvu, toujours, que le mouvement change par degrés inſenſibles, & que ſi l'on emploie des Machines à reſſorts, on laiſſe ces reſſorts dans le même état de tenſion où on les a pris.

LXV. Ces remarques ſur le moment d'activité, me font naître l'idée d'un principe d'équilibre particulier au cas où les forces exercées dans le ſyſtême, ſont des attractions ; j'ai cru que le Lecteur ne ſeroit pas fâché de le trouver ici ; voici en quoi il conſiſte :

Pluſieurs corps ſoumis aux loix d'une attraction exercée en raiſon d'une fonction quelconque des diſtances, ſoit par ces corps même les uns ſur les autres, ſoit par différents points fixes, étant appliqués à une

Machine quelconque ; ſi l'on fait paſſer cette Machine d'une poſition quelconque donnée, à celle de l'équilibre, le moment d'activité conſommé dans ce paſſage par les forces attractives dont ces corps ſeront animés pendant ce mouvement, ſera un maximum.

C'eſt-à-dire que ce moment ſera toujours plus grand qu'il ne l'auroit été, ſi, au lieu de faire paſſer ce ſyſtême à la poſition d'équilibre, on l'eût contraint de prendre une route différente, & de paſſer dans une autre ſituation quelconque.

Par exemple, s'il s'agit de la gravité, qu'on peut regarder comme une attraction exercée vers un point infiniment éloigné, les forces attractives ſeront les poids appliqués à la Machine ; le moment d'activité qui ſera exercé par ces forces, lorſqu'on fera changer de ſituation à cette Machine, ſera donc égal au poids total du ſyſtême multiplié par la hauteur dont aura monté ou deſcendu le centre de gravité pendant ce changement de poſition (XXXII) : or, la ſituation d'équilibre eſt celle où le centre de gravité eſt au point le plus haut ou le plus bas poſſible ; donc, la hauteur à laquelle doit monter le centre de gravité, ou dont il doit deſcendre pour paſſer d'une ſituation quelconque donnée à celle de l'équilibre, eſt plus grande que pour paſſer à toute autre ſituation : donc, le moment d'activité conſommé dans le paſſage, par les forces motrices, eſt auſſi plus grand dans le premier cas que dans tout autre.

Si l'attraction étoit toujours conſtante comme la gravité ordinaire, mais qu'elle fût dirigée vers un point fixe, placé à une diſtance finie, on concluroit aiſément du principe précédent, que dans le cas d'équilibre, la ſomme des moments des corps du ſyſtême, relativement à ce point fixe,

eſt un *maximum*, c'eſt-à-dire que la ſomme des produits de chaque maſſe, par ſa diſtance au point fixe, eſt moindre lorſqu'il y a équilibre, que ſi le ſyſtême ſe trouvoit dans une autre ſituation quelconque.

Si l'attraction vers le point fixe, au lieu d'être conſtante, étoit proportionnelle aux diſtances de ce corps, à ce point fixe, on concluroit de même que la ſomme des produits de chaque maſſe par le quarré de la diſtance à ce point fixe, eſt un *maximum*.

On ſait que la ſomme des produits de chaque maſſe, par le quarré de ſa diſtance à un point fixe quelconque, eſt égale à la ſomme des produits de chaque maſſe, par le quarré de ſa diſtance au centre de gravité; plus, au produit de la maſſe totale, par le quarré de la diſtance du centre de gravité à ce point fixe: (c'eſt une propoſition de géométrie fort connue, & dont il eſt facile de trouver la preuve); ainſi dans le cas d'attraction que nous examinons, la ſomme de ces deux quantités, doit, dans le cas d'équilibre, être un *maximum*, c'eſt-à-dire que ſa différentielle eſt égale à zéro. Suppoſons donc, par exemple, que toutes les parties du ſyſtême ſoient liées entr'elles, de maniere qu'elles ne faſſent qu'un même corps, & que ce corps ſoit ſuſpendu par ſon centre de gravité, tellement que ce point ſoit fixe; il eſt clair que chacune des quantités dont on vient de parler, ſera conſtante, c'eſt-à-dire reſtera la même, quelque ſituation qu'on donne à ce corps, & que la différentielle de leur ſomme, ſera, par conſéquent, nulle; donc, il y aura équilibre: c'eſt-à-dire que ſi toutes les parties d'un corps, ſont attirées vers un point fixe, proportionellement à leurs diſtances à ce point, & qu'on ſuſ-

pende ce corps par ſon centre de gravité, il reſtera en équilibre préciſément comme dans le cas de la peſanteur ordinaire. Il ne faut cependant pas conclure de là, que dans une Machine à laquelle ſeroient appliqués pluſieurs corps attirés vers un point fixe, en raiſon des diſtances, la poſition d'équilibre fût celle où le centre de gravité du ſyſtême ſeroit au point le plus bas, c'eſt-à-dire le plus proche poſſible du point fixe; car cela n'arrive que dans le cas où toutes les parties du ſyſtême tiennent enſemble & ne ſont qu'un ſeul corps; au lieu que dans le cas de la gravité naturelle, il n'eſt pas néceſſaire, pour que le centre de gravité ſoit au point le plus bas, que les parties du ſyſtême ſoient liées les unes aux autres.

Si les corps étoient attirés vers le point fixe, en raiſon inverſe de leurs diſtances à ce point, le principe allégué ci-deſſus feroit voir que la ſituation d'équilibre eſt alors celle où la ſomme des produits de chaque maſſe, par le logarithme de ſa diſtance au point fixe, eſt un *maximum*.

En général, ſi les corps m du ſyſtême ſont attirés en raiſon d'une puiſſance n, de leurs diſtances x, à ce point, la ſituation d'équilibre ſera celle où la quantité $\int m x^{n+1}$ ſera un *maximum*, ou plus grande que dans toute autre ſituation; c'eſt-à-dire où la différence de cette quantité à ce qu'elle ſeroit, ſi le ſyſtême étoit dans une ſituation infiniment voiſine, eſt égale à zéro.

S'il y a dans le ſyſtême pluſieurs points fixes, vers chacun deſquels les corps m ſoient attirés en raiſon d'une puiſſance donnée de leurs diſtances à ce point, de ſorte que x, y, z, &c. étant les diſtances de m à ces différents points fixes, Ax^n, By^q, Cz^r, &c. ſoient les forces centrales

de m vers ces différents foyers, ce ſera la quantité $\frac{A}{n+1}\int m x^{n+1} + \frac{B}{p+1}\int m y^{p+1} + \frac{C}{q+1}\int m z^{q+1} + \&c.$ qui ſera un *maximum* dans la poſition de l'équilibre.

Et ſi outre cela, les corps s'attirent les uns les autres, en raiſon d'une puiſſance quelconque donnée des diſtances, de ſorte que X exprimant la diſtance de la molécule m à chacune des autres molécules du ſyſtême, FX^r ſoit la force motrice, attractive de m vers cette autre molécule, la ſituation d'équilibre, ſera celle où la quantité $\frac{F}{2r+2}\int m X_r^{+1} + \frac{A}{n+1}\int m x^{n+1} + \frac{B}{p+1}\int m y^{p+1} + \frac{C}{q+1}\int m z^{+1} +$, &c. eſt un *maximum*; c'eſt-à-dire plus grande que dans toute autre ſituation.

Il ſeroit aiſé d'étendre encore ces conſéquences à d'autres hypotheſes d'attraction; mais la choſe paroît inutile : ainſi je me bornerai à remarquer qu'on peut, par un principe général à celui qu'on vient de voir, établir que,

Quelle que ſoit la nature des puiſſances motrices appliquées à une Machine, ſi on la fait mouvoir de maniere qu'elle paſſe par la poſition d'équilibre, l'inſtant où elle arrivera dans cette ſituation, ſera celui où le moment d'activité conſommé pendant le mouvement, par ces puiſſances motrices, ſera le plus grand.

C'eſt-à-dire que le moment d'activité que les puiſſances propoſées conſomment pendant le mouvement, va toujours en augmentant, juſqu'à ce que la Machine ait atteint la poſition d'équilibre; après quoi, ce moment va en diminant, à me-

ſure que le ſyſtême s'éloigne de cette poſition, lorſqu'il l'a dépaſſée ; quelle que ſoit d'ailleurs la route qu'on ait fait prendre à cette Machine, pour l'amener à cette ſituation.

Suppoſons, par exemple, que chacune des puiſſances appliquées à la Machine, ſoit donnée de grandeur, & qu'on connoiſſe de plus un des points de la direction qu'elle doit avoir, pour qu'il y ait équilibre ; je dis que cette ſituation d'équilibre eſt celle où la ſomme des produits de chacune de ces puiſſances données par la diſtance du point de la Machine où on l'a ſuppoſé appliquée, au point fixe donné ſur ſa direction, eſt la moindre poſſible (1) ; ce qui ſe tire aiſément du principe précédent.

Toutes ces choſes ſont ſi faciles à prouver, après ce qui a été dit dans le cours de cette ſeconde partie, qu'il paroît inutile de s'y arrêter. Je finirai donc cet opuſcule par quelques réflexions ſur les loix fondamentales dont je ſuis parti pour établir la théorie qu'il contient.

Réflexions ſur les loix fondamentales de l'équilibre & du mouvement.

Parmi les Philoſophes qui s'occupent de la re-

---

(1) Il eſt à remarquer que dans tout ce qui vient d'être dit au ſujet d'une Machine conſidérée dans différentes poſitions, & de ſon paſſage de l'une à l'autre ; il eſt, dis-je, à remarquer que ces poſitions ſont toujours ſuppoſées telles, qu'on paſſe de l'une à l'autre par un mouvement qui ſoit à chaque inſtant de ceux que j'ai appellés *géométriques* ; autrement toutes ces propoſitions ſeroient ſujettes aux mêmes défauts que nous avons cru (V) pouvoir reprocher au principe de *Deſcartes*, & à pluſieurs autres.

cherche des loix du mouvement, les uns font de la Méchanique, une ſcience expérimentale, les autres, une ſcience purement rationnelle; c'eſt-à-dire que les premiers comparant les phénomenes de la nature, les décompoſent, pour ainſi dire, pour connoître ce qu'ils ont de commun, & les reduire ainſi à un petit nombre de faits principaux, qui ſervent enſuite à expliquer tous les autres, & à prévoir ce qui doit arriver dans chaque circonſtance; les autres commencent par des hypotheſes, puis raiſonnant conſéquemment à leurs ſuppoſitions, parviennent à découvrir les loix que ſuivroient les corps dans leurs mouvements, ſi leurs hypotheſes étoient conformes à la nature, puis comparant leurs réſultats ave les phénomenes, & trouvant qu'ils s'accordent, en concluent que leur hypotheſe eſt exacte, c'eſt-à-dire que les corps ſuivent en effet les loix qu'ils n'avoient fait d'abord que ſuppoſer.

Les premiers de ces deux claſſes de Philoſophes, partent donc dans leurs recherches, des notions primitives que la nature a imprimées en nous, & des expériences qu'elle nous offre continuellement; les autres partent de définitions & d'hypotheſes: pour les premiers, les noms de corps, de puiſſances, d'équilibre, de mouvement, répondent à des idées premieres; ils ne peuvent ni ne doivent les définir; les autres au contraire ayant tout à tirer de leur propre fond, ſont obligés de définir ces termes avec exactitude, & d'expliquer clairement toutes leurs ſuppoſitions; mais ſi cette méthode paroît plus élégante, elle eſt auſſi bien plus difficile que l'autre; car il n'y a rien de ſi embarraſſant dans la plupart des ſciences rationnelles, & ſur-tout dans celle-ci, que de poſer d'abord d'exactes défini-

tions ſur leſquelles il ne reſte aucune ambiguité : ce ſeroit me jeter dans des diſcuſſions métaphyſiques, bien au deſſus de mes forces, que de vouloir approfondir toutes celles qu'on a propoſées juſqu'ici : je me contenterai d'examiner la premiere & la plus ſimple.

Qu'eſt-ce qu'un corps ? C'eſt, diſent la plupart, une étendue impénétrable, c'eſt-à-dire qui ne peut en aucune maniere être réduite à un eſpace moindre : mais cette propriété n'eſt-elle pas commune au corps & à l'eſpace vuide ; un pied cube de vuide peut-il occuper un eſpace moindre ? Il eſt clair que non. Suppoſons qu'un pied cube d'eau, par exemple, ſoit enfermé dans un vaſe capable de contenir deux pieds cubes, & fermé de tout côté ; qu'on agite, qu'on boulverſe ce vaſe tant qu'on voudra, il reſtera toujours un pied cube d'eau & un pied cube de vuide : voilà deux eſpaces d'une nature différente, à la vérité, mais tout auſſi irréductibles l'un que l'autre : ce n'eſt donc pas en cela que conſiſte la propriété caractériſtique des corps. D'autres diſent que cette propriété conſiſte dans la mobilité ; l'eſpace indéfini & vuide, diſent-ils, eſt immobile, tandis que les corps peuvent ſe tranſporter d'un lieu de cet eſpace à un autre : mais lorſque le corps *A* paſſe en *B*, par exemple, l'eſpace vuide qui étoit en *B*, n'a-t-il pas paſſé en *A* ? Il n'y a, ce me ſemble, pas plus de raiſon d'attribuer le mouvement au plein qui étoit en *A*, qu'au vuide qui étoit en *B* ; le mouvement conſiſte en ce que l'un de ces eſpaces a remplacé l'autre ; & ce remplacement étant réciproque, la mobilité eſt une propriété qui n'appartient pas plus à l'un qu'à l'autre. Sans ſortir de notre premiere ſuppoſition, lorſque j'agite le vaſe moitié

vuide & moitié plein, le vuide n'eſt-il pas mu tout auſſi bien que le fluide ? Je plonge une boule de métal, creuſe, dans une bouteille ; la boule va au fond ; ne voilà-t-il pas un vuide qui ſe meut dans un plein, tout de même que les corps ſe meuvent dans le vuide ? L'eſpace plein ne differe donc de l'eſpace vuide, ni par la mobilité, ni par l'irréductibilité ; l'impénétrabilité qui diſtingue le premier du ſecond, n'eſt donc pas la même choſe que cette irréductibilité ; c'eſt un je ne ſais quoi qu'on ne peut définir, parce que c'eſt une idée premiere.

Les deux loix fondamentales dont je ſuis parti (XI), ſont donc des vérités purement expérimentales ; & je les ai propoſées comme telles. Une explication détaillée de ces principes n'entroit pas dans le plan de cet ouvrage, & n'auroit peut-être ſervi qu'à embrouiller les choſes : les ſciences ſont comme un beau fleuve, dont le cours eſt facile à ſuivre, lorſqu'il a acquis une certaine régularité ; mais ſi l'on veut remonter à la ſource, on ne la trouve nulle part, parce qu'elle eſt par-tout ; elle eſt répandue en quelque ſorte ſur toute la ſurface de la terre : de même ſi l'on veut remonter à l'origine des ſciences, on ne trouve qu'obſcurité, idées vagues, cercles vicieux ; & l'on ſe perd dans les idées primitives.

FIN.

J'AI lu par ordre de Monſeigneur le Garde des Sceaux, un Manuſcrit intitulé *Eſſai ſur les Machines en général.* Cet Ouvrage m'a paru joindre au mérite des choſes, celui de la clarté & de la préciſion ; & je penſe que l'impreſſion en ſera utile aux progrès de la Méchanique. A Dijon, ce 6 Janvier 1782.

MARET, Cenſeur royal.

ERRATA.

Les fautes indiquées dans cet Errata, doivent être corrigées avant de lire l'Ouvrage, parce qu'elles ſont pour la plupart eſſentielles.

Page vj, *ligne* 5, *au lieu de* exactement, *liſez* exacts.
Page 22, *lignes* 1 & 2, *au lieu de* eſt la force réſultante, *liſez* eſt réſultante.
Page 31, *ligne* 26, *au lieu de* ſi on les ſuppoſe, *liſez* donc ſi on les ſuppoſe.
Page 38, *ligne* 2 *de la note*, *au lieu de* ſucceſſivement, *liſez* exclu-ſivement.
Page 42, *ligne* 7, *au lieu de* cos y, *liſez* V cos y.
Page 46, *ligne* 1 & 2, *au lieu de* par la vîteſſe, *liſez* par le carré de la vîteſſe.
Page 49, *ligne* 16, *au lieu de* XXI *liſez* XIX.
Page 63, *ligne* 1 *de la note*, *au lieu de* (1), *liſez* (2).
Page 77, *ligne* 3, *au lieu de* note c, *liſez* note 2.
Page 103, *ligne* 19, *au lieu de* général à celui, *liſez* général analo-gue à celui.